Об авторе **Валерий Павлович СУПРУН**

Доцент механико-математического факультета Белорусского государственного университета, зам. декана по научной работе (1996–2007), кандидат технических наук. Область научных интересов: дискретная математика и вычислительная техника. Имеет около 60 научных статей по дискретной математике и более 200 изобретений в области автоматики и вычислительной техники. Награжден Золотой медалью и Дипломом Всемирной организации интеллектуальной собственности (ВОИС), как «Лучший изобретатель Беларуси 2006 года».

Автор учебных пособий «Математика для старшеклассников. Задачи повышенной сложности» (Минск, 2002); «Математика для старшеклассников. Нестандартные методы решения задач» (Минск, 2003); «Уравнения и неравенства: готовимся к вступительному экзамену» (Минск, 2003). В последние годы регулярно публикуется в журнале для школьников и абитуриентов «Репетитор» (Минск).

5081 ID 56579

9 785382 007830

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Тел./факс: 7 (499) 135–42–16
Тел./факс: 7 (499) 135–42–46

URSS

E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru

В. П. Супрун МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

Задачи повышенной сложности

Школьникам, абитуриентам, учащимся

URSS

В. П. Супрун

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

Задачи повышенной сложности

300 ЗАДАЧ с подробными решениями

URSS

Оглавление

От автора

При решении задач, предлагаемых на Централизованном тестировании по математике, а также на вступительных письменных экзаменах, могут быть использованы любые известные абитуриентам методы. При этом разрешается использовать методы, которые не изучаются в общеобразовательной школе (так называемые — нестандартные методы). Как правило, применение нестандартных методов позволяет упрощать решение многих сложных задач школьной математики.

Многолетний опыт работы автора с абитуриентами, а также анализ задач по математике, предлагаемых на Централизованном тестировании и на вступительных экзаменах в ведущих ВУЗах Республики Беларусь, свидетельствует об необходимости самостоятельного изучения старшеклассниками математических методов, в основе которых лежат понятия и положения, которые не входят в программу по математике общеобразовательной школы. К таким математическим понятиям относятся, например, численные неравенства Коши, Коши—Буняковского и Бернулли, бином Ньютона n-й степени, а также метод математической индукции.

В учебном пособии представлены **300** задач повышенной сложности, решение которых основано на применении указанных выше численных неравенств и метода математической индукции. Некоторые уравнения и неравенства эффективно решаются функциональными методами, выделением полного квадрата, введением параметра или применением тригонометрической подстановки.

Настоящее пособие представляет собой существенно исправленное и дополненное переиздание учебного пособия автора ***«Математика для старшеклассников: задачи повышенной сложности»*** (Мн., Аверсэв, 2002). Пособие содержит большое количество новых задач повышенной сложности, многие из которых позаимствованы из материалов Централизованного тестирования и вступительных экзаменов по математике в Белорусском государственном университете (г. Минск) в течение последних пяти лет.

В пособии первоначально излагаются основные математические понятия и положения, которые необходимо знать для использования нестандартных методов. Затем приводятся условия и решения задач повышенной сложности из различных разделов школьной математики (алгебра, тригонометрия, геометрия). В завершающей части пособия дается описание и применение метода математической индукции.

Глава 1

Применение нестандартных методов решения уравнений и неравенств

К числу задач повышенной сложности по математике относятся уравнения и неравенства, решение которых основано на несколько необычных (нестандартных) рассуждениях учащихся. К таким задачам относятся, например, уравнения и неравенства, содержащие модули, логарифмы, бином Ньютона n-й степени. Многие задачи повышенной сложности (из различных разделов математики) решаются методом математической индукции, а также с помощью численных неравенств Коши, Коши—Буняковского и Бернулли, изучению которых в общеобразовательной школе уделяется мало внимания. В то же время многие задачи, предлагаемые в последние годы на вступительных экзаменах по математике в Белгосуниверситете, эффективно решаются методами, в основе которых лежит применение упомянутых выше неравенств. Естественно, незнание таких методов и (или) неумение ими пользоваться ставит под сомнение успешное решение заданий конкурсных вступительных экзаменов по математике.

Поскольку изучение нестандартных методов решения задач по математике не входит в программу общеобразовательной школы, предварительно рассмотрим определения численных неравенств Коши, Коши—Буняковского и Бернулли, а также некоторых неравенств, которые доказываются с их помощью. Кроме того, приведем формулу бинома Ньютона n-й степени, а также малоизвестные формулы, содержащие модули и логарифмы. Затем приведем формулировки (вместе с подробным решением) **300** задач повышенной сложности из различных разделов математики.

§ 1.1. Неравенство Коши

Пусть $a_1 \geqslant 0,\ a_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ a_n \geqslant 0$, тогда

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \qquad (1)$$

где $n \geqslant 2$. Причем неравенство (1) превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (доказать неравенство Коши можно методом математической индукции, см. задачу **299**).

В частности, если $n = 2$, то неравенство (1) принимает вид

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}. \tag{2}$$

Если положить $a_1 = a$ и $a_2 = \dfrac{1}{a}$, то из (2) получаем

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2, \tag{3}$$

где $a > 0$. Неравенство (3) равносильно равенству лишь при $a = 1$.

Нетрудно установить, если $ma < 0$, то имеет место неравенство

$$a + \frac{1}{a} \leqslant -2, \tag{4}$$

которое превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = -1$.

Если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$, то

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}. \tag{5}$$

Неравенство (5) доказывается путем двукратного применения неравенства Коши (1) к левой его части. Имеет место

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n}{\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}} = \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

§ 1.2. Неравенство Бернулли

«Классическое» неравенство Бернулли формулируется следующим образом: для $x > -1$ и произвольного натурального n имеет место

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx. \tag{6}$$

Причем равенство в (6) достигается при $x = 0$ или $n = 1$.

Доказательство неравенства (6) дано ниже (см. задачу **293**).

Кроме «классического» неравенства Бернулли существует менее известная формулировка неравенства Бернулли, которая содержит в себе следующие два неравенства:

если $p < 0$ или $p > 1$, то

$$(1 + x)^p \geqslant 1 + px, \tag{7}$$

если $0 < p < 1$, то

$$(1 + x)^p \leqslant 1 + px, \tag{8}$$

где $x > -1$.

Следует отметить, что равенство в выражениях (7) и (8) имеет место тогда и только тогда, когда $x = 0$.

§ 1.3. Неравенство Коши—Буняковского

Для произвольных действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ выполняется неравенство

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right), \tag{9}$$

где $n \geqslant 2$. Причем равенство в (9) достигается в том и только в том случае, когда числа x_k и y_k пропорциональны, т. е. существует константа a ($a \neq 0$) такая, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется равенство $x_k = a y_k$.

Доказательство неравенства (9) приводится при решении задачи **22**.

В некоторых случаях весьма эффективным является применение неравенства

$$(a + b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n), \tag{10}$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Причем равенство в (10) достигается тогда и только тогда, когда $n = 1$ или $a = b$. Справедливость неравенства (10) доказывается методом математической индукции (см. задачу **295**).

§ 1.4. Бином Ньютона

Формула бинома Ньютона n-й степени имеет вид

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n, \tag{11}$$

где C_n^k — биномиальный коэффициент «число сочетаний из n по k» вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Здесь $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, $0! = 1! = 1$ и $0 \leqslant k \leqslant n$. В частности, имеет место $C_n^0 = C_n^n = 1$ и $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Если в формуле (11) положить $a = x$ и $b = 1$, то

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2}x^2 + C_n^{n-1}x + C_n^n.$$

Поскольку $C_n^{n-1} = n$ и $C_n^1 = n$, то из приведенной выше формулы получаем

$$(x+1)^n = Ax + 1 = Bx^2 + nx + 1, \qquad (12)$$

где

$$A = C_n^0 x^{n-1} + C_n^1 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \quad \text{и}$$
$$B = C_n^0 x^{n-2} + C_n^1 x^{n-3} + \ldots + C_n^{n-2}.$$

Из формулы (12) следует, если x — целое число, то A и B также являются целыми числами.

§ 1.5. Модули

К задачам повышенной сложности относятся также задачи на решение уравнений и неравенств, содержащих модули.

Определение. Пусть a — некоторое действительное число. Тогда

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Из приведенного выше определения следует, что если $|a| = |b|$, то $a = \pm b$.

Задачи на решение уравнений и неравенств с модулями можно решать обычным образом — «раскрытием» модуля. Однако при таком способе поиска решения часто приходится рассматривать много случаев. Более того, «раскрытие» модуля иногда сопряжено с техническими трудностями.

Упростить решение уравнений и неравенств с модулями позволяет использование следующих правил:

1) Неравенство $|f(x)| \leqslant g(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x); \\ f(x) \geqslant -g(x). \end{cases}$$
2) Неравенство $f(x)| \geqslant g(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) \geqslant g(x)$ или $f(x) \leqslant -g(x)$.
3) Неравенство $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ имеет место тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x); \\ f(x) \geqslant -g(x), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) \geqslant g(x); \\ f(x) \leqslant -g(x). \end{cases}$$

Кроме того, для произвольных выражений $f(x)$ и $g(x)$ справедливо неравенство

$$|f(x)| + |g(x)| \geqslant |f(x) \pm g(x)|.$$

При этом необходимо учитывать следующие ситуации:

$$\begin{array}{llll} \text{если} & |f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)|, & \text{то} & f(x)\cdot g(x) \geqslant 0; \\ \text{если} & |f(x)| + |g(x)| = |f(x) - g(x)|, & \text{то} & f(x)\cdot g(x) \leqslant 0; \\ \text{если} & |f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x), & \text{то} & f(x) \geqslant 0 \text{ и } g(x) \geqslant 0; \\ \text{если} & |f(x)| + |g(x)| = f(x) - g(x), & \text{то} & f(x) \geqslant 0 \text{ и } g(x) \leqslant 0. \end{array}$$

§ 1.6. Тригонометрические преобразования

При решении тригонометрических уравнений и неравенств иногда бывает полезным представление выражения $a\sin x \pm b\cos x$ посредством формулы

$$a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x \pm \omega), \qquad (13)$$

где вспомогательный угол ω определяется соотношениями

$$\sin\omega = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\omega = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

с точностью до слагаемого $2\pi n$, где n — целое число.

В частности, имеет место равенство

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right).$$

Отсюда следует, что $-\sqrt{2} \leqslant \sin x \pm \cos x \leqslant \sqrt{2}$.

Для обратных тригонометрические функций справедливы следующие полезные соотношения:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$
$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi \quad (x - \text{любое}),$$
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,$$
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

§ 1.7. Логарифмы

При решении логарифмических уравнений и неравенств в ряде случаев можно посоветовать применять известные формулы логарифмирования в несколько иной форме, а именно

$$\log_a(f(x) \cdot g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|, \tag{14}$$
$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|, \tag{15}$$
$$\log_a f^p(x) = p\log_a|f(x)| \quad (p \text{ — четное число}). \tag{16}$$

При использовании формул (14), (15) возможность потеря корня исключена, однако могут появиться посторонние корни. Поэтому при использовании формул (14), (15) необходимо обязательно осуществлять проверку получаемых значений неизвестных переменных.

В то же время, в формуле (16) области допустимых значений переменной x обеих частей равенства совпадают.

Отметим также малоизвестное равенство

$$f(x)^{\log_a g(x)} = g(x)^{\log_a f(x)}, \tag{17}$$

справедливость которого доказывается путем логарифмирования по основанию a обеих его частей, где $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$.

Глава 2

Задачи, встречающиеся на письменных экзаменах по математике

§ 2.1. Делимость чисел

1. Доказать, что при любом натуральном n число $5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$ делится на 11.

Решение. Первоначально преобразуем заданное выражение следующим образом:

$$5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n} = 5\cdot(3125)^n + 16\cdot(1024)^n + (243)^n =$$
$$= 5\cdot(11\cdot 284+1)^n + 16\cdot(11\cdot 93+1)^n + (11\cdot 22+1)^n.$$

Отсюда, принимая во внимание формулу (12), получаем

$$5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n} =$$
$$= 5\cdot(11A+1) + 16\cdot(11B+1) + (11C+1) =$$
$$= 11\cdot(5A+16B+C) + 5 + 16 + 1 = 11D + 22 = 11E.$$

Поскольку в полученном выражении A, B, C, D, E — целые числа, то утверждение задачи доказано.

2. Доказать, что при любом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

Решение. Используя формулу (12), запишем

$$4^n + 15n - 1 = (3+1)^n + 15n - 1 =$$
$$= (9A + 3n + 1) + 15n - 1 = 9A + 18n,$$

где A — целое число. Очевидно, что заданное выражение кратно 9.

3. Доказать, что при любом целом положительном n число $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17.

Решение. Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned}2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2} &= 8\cdot 32^n+9\cdot 15^n=\\&=8\cdot(17+15)^n+9\cdot 15^n=\\&=8\cdot(17A+15^n)+9\cdot 15^n=\\&=8\cdot 17A+17\cdot 15^n=17B,\end{aligned}$$

где A, B — целые числа. Следовательно, выражение $2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}$ кратно 17 для любого натурального числа n. Здесь была использована формула (11).

4. Доказать, что при любом натуральном n число $3^{2n+3}+40n-27$ делится на 64.

Решение. Имеет место

$$\begin{aligned}3^{2n+3}+40n-27 &= 27\cdot 9^n+40n-27=\\&=27\cdot(8+1)^n+40n-27=\\&=27\cdot(64A+8n+1)+40n-27=\\&=27\cdot 64A+27\cdot 8n+27+40n-27=\\&=27\cdot 64A+256n,\end{aligned}$$

где A — целое число. Отсюда следует, что полученное выражение кратно 64.

5. Доказать, что при любом натуральном n число $5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$ делится на 91.

Решение. Покажем, что заданное выражение при любых значениях n одновременно кратно 7 и кратно 13. Так как числа 7 и 13 простые, то отсюда будет следовать, что заданное выражение делится на 91 при любом натуральном n.

Имеет место

$$5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)=25^n+5^n-18^n-12^n.$$

Рассмотрим следующие два преобразования:

1) $$\begin{aligned}25^n+5^n-18^n-12^n &= (7+18)^n+5^n-18^n-(7+5)^n=\\&=(7A+18^n)+5^n-18^n-(7B+5^n)=\\&=7A-7B, \quad \text{где } A,\ B \text{ — некоторые целые числа.}\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}25^n+5^n-18^n-12^n &= (13+12)^n+5^n-(13+5)^n-12^n=\\&=(13C+12^n)+5^n-(13D+5^n)-12^n=\\&=13C-13D, \quad \text{где } C,\ D \text{ — некоторые целые числа.}\end{aligned}$$

Так как заданное выражение $5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$ кратно 7 и одновременно с этим кратно 13, то оно будет кратно $7\cdot 13=91$.

Примечание. При решении задач 1–5 можно использовать также метод математической индукции (см., например, задачу 290).

§ 2.2. Вычисление суммы

6. Вычислить сумму

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}.$$

Решение. Обозначим искомую сумму через S_n и представим каждое ее слагаемое в виде разности двух дробей, т. е.

$$\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right),\qquad \frac{1}{5\cdot 9}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right),$$
$$\frac{1}{9\cdot 13}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right),\quad \ldots,$$
$$\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right).$$

В таком случае

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)=\\&=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}.\end{aligned}$$

7. Вычислить сумму

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n, \quad \text{где} \quad n\geqslant 2.$$

Решение. Обозначим искомую сумму через C_n, а через S_n обозначим сумму $1+2+\ldots+n$. Тогда

$$C_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n=$$

$$= (2+3+4+\ldots+n) + (3+4+\ldots+n) + \\ + (4+\ldots+n) + \ldots a + (n-1+n) + n = \\ = (S_n - S_1) + (S_n - S_2) + \\ + (S_n - S_3) + \ldots + (S_n - S_{n-2}) + (S_n - S_{n-1}) = \\ = (n-1)S_n - (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-2} + S_{n-1}).$$

Известно, что $S_n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n^2+n)$. В таком случае

$$C_n = \frac{1}{2}(n-1)(n^2+n) - \\ - \frac{1}{2}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+1+2+3+\ldots+n-1\right).$$

Также известно (см. задачу 281), что

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Тогда

$$C_n = \frac{1}{2}(n-1)(n^2+n) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n\right) = \\ = \frac{1}{2}(n-1)\left(n^2+n-\frac{2n^2-n}{6}-\frac{n}{2}\right) = \\ = \frac{(n-1)(6n^2+6n-2n^2+n-3n)}{12} = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

Примечание. Имеется более простое решение данной задачи. Для любого натурального i имеет место равенство

$$(i-1)\cdot i = \frac{1}{3}\cdot\left((i-1)\cdot i\cdot(i+1) - (i-2)\cdot(i-1)\cdot i\right),$$

которое можно легко доказать путем раскрытия скобок. Тогда

$$C_n = \sum_{i=2}^{n}\left((i-1)\cdot i\right) = \frac{1}{3}\cdot\sum_{i=2}^{n}\left((i-1)\cdot i\cdot(i+1) - (i-2)\cdot(i-1)\cdot i\right) = \\ = \frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{i=2}^{n}\left((i-1)\cdot i\cdot(i+1)\right) - \sum_{i=1}^{n-1}\left((i-1)\cdot i\cdot(i+1)\right)\right) = \\ = \frac{1}{3}\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1) = \frac{n\cdot\left(n^2-1\right)}{3}.$$

8. Вычислить сумму $S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \ldots + \frac{n}{5^n} + \ldots$.

Решение. Умножим на 5 обе части искомой суммы, тогда

$$5S = 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \ldots + \frac{n}{5^{n-1}} + \ldots .$$

Если из полученного выражения вычтем заданное выражение суммы, то

$$4S = 1 + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{3}{5^2} - \frac{2}{5^2}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{5^{n-1}} - \frac{n-1}{5^{n-1}}\right) + \ldots = \\ = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^{n-1}} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}.$$

Отсюда получаем $S = 5/16$.

Примечание. При решении задачи 8 была использована формула вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, у которой $b_1 = 1$ и $q = 1/5$, т. е.

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}.$$

9. Найти сумму

$$S = \frac{1}{\cos x\cdot\cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x\cdot\cos 3x} + \ldots + \frac{1}{\cos 9x\cdot\cos 10x}.$$

Решение. Имеют место следующие равносильные преобразования:

$$S = \frac{1}{\cos x\cdot\cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x\cdot\cos 3x} + \ldots + \frac{1}{\cos 9x\cdot\cos 10x} = \\ = \frac{1}{\sin x}\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos 2x} + \frac{\sin x}{\cos 2x\cdot\cos 3x} + \ldots + \frac{\sin x}{\cos 9x\cdot\cos 10x}\right) = \\ = \frac{1}{\sin x}\cdot\left(\frac{\sin(2x-x)}{\cos x\cdot\cos 2x} + \frac{\sin(3x-2x)}{\cos 2x\cdot\cos 3x} + \ldots + \frac{\sin(10x-9x)}{\cos 9x\cdot\cos 10x}\right) = \\ = \frac{1}{\sin x}\cdot\left(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x + \ldots + \operatorname{tg} 10x - \operatorname{tg} 9x\right) = \\ = \frac{1}{\sin x}\cdot(\operatorname{tg} 10x - \operatorname{tg} x) = \frac{\sin 9x}{\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 10x} = \frac{2\cdot\sin 9x}{\sin 2x\cdot\cos 10x}.$$

Примечание. При вычислении искомой суммы были использованы формулы $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$ и $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

§ 2.3. Арифметические вычисления

10. $\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}$.

Решение. Рассмотрим два способа вычисления значения $\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}$.

Способ 1. Будем искать представление $50+19\sqrt{7}$ в виде полного куба, т. е. $50+19\sqrt{7}=(a+b\sqrt{7})^3$. После возведения в куб правой части данного выражения имеем

$$50+19\sqrt{7}=a^3+3\sqrt{7}\,a^2b+21ab^2+7\sqrt{7}\,b^3,$$

или

$$50+19\sqrt{7}=(a^3+21ab^2)+\sqrt{7}\cdot(3a^2b+7b^3).$$

Отсюда получаем систему двух уравнений относительно неизвестных переменных a и b вида

$$\begin{cases} a^3+21ab^2=50,\\ 3a^2b+7b^3=19 \end{cases}$$

или

$$\frac{a^3+21ab^2}{3a^2b+7b^3}=\frac{50}{19}.$$

Если числитель и знаменатель дроби разделить на b^3 и обозначить $t=\dfrac{a}{b}$, то $\dfrac{t^3+21t}{3t^2+7}=\dfrac{50}{19}$ или $19t^3-150t^2+399t-350=0$. Одним из корней кубического уравнения является $t=2$.

Поскольку $t=\dfrac{a}{b}$ и $t=2$, то $a=2b$. В этой связи первое уравнение системы принимает вид $8b^3+42b^3=50$. Отсюда следует, что $b=1$. Так как $a=2b$, то $a=2$ и $50+19\sqrt{7}=(2+\sqrt{7})^3$. В таком случае $\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}=2+\sqrt{7}$.

Способ 2. Предварительно вычислим значение выражения $\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}+\sqrt[3]{50-19\sqrt{7}}$. Обозначим

$$\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}+\sqrt[3]{50-19\sqrt{7}}=x$$

и возведем обе части данного равенства в куб. При этом будем использовать формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Тогда получим

$$50+19\sqrt{7}+50-19\sqrt{7}+3\cdot\sqrt[3]{-27}\cdot x=x^3$$

или $x^3+9x-100=0$. Данное уравнение имеет единственный действительный корень $x_1=4$, который легко найти подбором.

Следовательно, имеет место равенство

$$\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}+\sqrt[3]{50-19\sqrt{7}}=4.$$

В этом равенстве обозначим $\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}=y$. Поскольку

$$\left(\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{50-19\sqrt{7}}\right)=-3,$$

то $\sqrt[3]{50-19\sqrt{7}}=-\dfrac{3}{y}$ и для вычисления значения $\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}$ необходимо решить уравнение $y-\dfrac{3}{y}=4$ или $y^2-4y-3=0$. Отсюда получаем $y_{1,2}=2\pm\sqrt{7}$. Так как $y>0$, то $y=2+\sqrt{7}$ или $\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}=2+\sqrt{7}$.

Отметим, что $\sqrt[3]{50-19\sqrt{7}}=2-\sqrt{7}$.

11. $\sqrt{4444488889}$.

Решение. Имеет место следующая цепочка преобразований:

$$\sqrt{4444488889}=\sqrt{4444444444+44444+1}=$$
$$=\sqrt{4\cdot1111111111+4\cdot11111+1}=\frac{1}{3}\sqrt{4\cdot9999999999+4\cdot99999+9}=$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{4\cdot(10^{10}-1)+4\cdot(10^5-1)+9}=\frac{1}{3}\sqrt{4\cdot10^{10}+4\cdot10^5+1}=$$
$$=\frac{1}{3}(2\cdot10^5+1)=\frac{200001}{3}=66667.$$

12. $\sqrt[3]{999700029999}$.

Решение. Преобразуем заданное выражение следующим образом:

$$\sqrt[3]{999700029999}=\sqrt[3]{999\cdot 10^9+7\cdot 10^8+2\cdot 10^4+9999}=$$
$$=\sqrt[3]{\left(10^3-1\right)\cdot 10^9+7\cdot 10^8+2\cdot 10^4+10^4-1}=$$
$$=\sqrt[3]{10^{12}-10^9+7\cdot 10^8+3\cdot 10^4-1}=$$
$$=\sqrt[3]{10^{12}-3\cdot 10^8+3\cdot 10^4-1}=$$
$$=10^4-1=9999.$$

13. $\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89}-\underbrace{11\ldots1}_{30}\underbrace{00\ldots0}_{30}}$.

Решение. Имеет место

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89}-\underbrace{11\ldots1}_{30}\underbrace{00\ldots0}_{30}}=$$
$$=\sqrt[3]{37\cdot\left(10^{87}+10^{84}+\ldots+10^0\right)-\underbrace{11\ldots1}_{30}\cdot 10^{30}}=$$
$$=\sqrt[3]{37\cdot\frac{10^{90}-1}{10^3-1}-\frac{1}{9}\cdot\left(10^{30}-1\right)\cdot 10^{30}}=$$
$$=\sqrt[3]{\frac{10^{90}-1}{27}-\frac{10^{60}-10^{30}}{9}}=$$
$$=\sqrt[3]{\frac{10^{90}-3\cdot 10^{60}+3\cdot 10^{30}-1}{27}}=$$
$$=\frac{10^{30}-1}{3}=\underbrace{33\ldots3}_{30}.$$

14. $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}-\underbrace{66\ldots6}_{n}}$, где $n\geqslant 3$.

Решение. Выполним следующие преобразования:

$$\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}-\underbrace{66\ldots6}_{n}}=$$
$$=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2n}+\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n+1}-\frac{6}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{4\cdot\left(10^{2n}-1\right)+\left(10^{n+1}-1\right)-6\cdot\left(10^n-1\right)}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{4\cdot 10^{2n}+4\cdot 10^n+1}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(2\cdot 10^n+1\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 2\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1=\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7.$$

15. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$.

Решение. Обозначим $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$. Очевидно, что здесь $x>0$. Возведем обе части равенства в квадрат, тогда

$$x^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}.$$

Отсюда следует квадратное уравнение относительно переменной x вида $x^2=2+x$ или $x^2-x-2=0$. Корнями уравнения являются $x_1=2$ и $x_2=-1$. Так как $x>0$, то $x_1=2$ и $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=2$.

16. Вычислить значение $\dfrac{a+b}{a-b}$, если $a^2+b^2=3ab$ и $0<b<a$.

Решение. Так как $0<b<a$, то $a=kb$, где $k>1$. В этой связи, если обе части равенства $a^2+b^2=3ab$ разделить на b^2, то получим квадратное уравнение относительно переменной k вида $k^2-3k+1=0$.

Поскольку $k > 1$, то из уравнения $k^2 - 3k + 1 = 0$ получаем $k = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Если числитель и знаменатель дроби $\dfrac{a+b}{a-b}$ разделить на b, то

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{k+1}{k-1} = \frac{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}+1}{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+1)}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

§ 2.4. Алгебраические и тригонометрические преобразования

17. Упростить

$$(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (x-y+z)^3 - (-x+y+z)^3.$$

Решение. Обозначим $x+y=a$ и $x-y=b$. Тогда, воспользовавшись (дважды) формулой разности кубов, получаем

$$(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (x-y+z)^3 - (-x+y+z)^3 =$$
$$= \left((a+z)^3 - (a-z)^3\right) - \left((b+z)^3 - (b-z)^3\right) =$$
$$= 2z\cdot(3a^2 - z^2) - 2z\cdot(3b^2 - z^2) = 6z\cdot(a^2 - b^2) = 24xyz.$$

Здесь было использовано равенство $a^2 - b^2 = 4xy$.

18. Доказать, если $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$, то $(x+y+z)^3 = 27xyz$.

Решение. Возведем в куб обе части равенства $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -\sqrt[3]{z}$, используя при этом формулу $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, тогда

$$x + y + 3\cdot\sqrt[3]{xy}\cdot(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}) = -z,$$
$$x + y + 3\cdot\sqrt[3]{xy}\cdot(-\sqrt[3]{z}) = -z,$$
$$x + y + z = 3\cdot\sqrt[3]{xyz} \quad \text{или}$$
$$(x+y+z)^3 = 27xyz.$$

19. Доказать, что

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1, \quad \text{где } x, y, z = 1.$$

Решение. Преобразуем левую часть заданного выражения (с учетом того, что $xyz = 1$), следующим образом:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x(1+y+yz)} + \frac{xy}{xy(1+z+zx)} =$$
$$= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{xy}{xy+xyz+x^2yz} =$$
$$= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+1} + \frac{xy}{xy+1+x} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1.$$

20. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $2\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha + 5\cos\alpha = 10$.

Решение. Заданное выражение преобразуем следующим образом:

$$2\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha + 5\cos\alpha = 10, \quad 5\cos\alpha - \sin\alpha - 10 + 2\operatorname{tg}\alpha = 0,$$
$$5\cos\alpha - \sin\alpha - 2\cdot\left(5 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = 0,$$
$$\cos\alpha\cdot(5\cos\alpha - \sin\alpha) - 2\cdot(5\cos\alpha - \sin\alpha) = 0,$$
$$(5\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha - 2) = 0. \qquad (*)$$

Так как $\cos\alpha - 2 \neq 0$, то из равенства $(*)$ получаем

$$5\cos\alpha - \sin\alpha = 0.$$

В этой связи из заданного равенства

$$2\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha + 5\cos\alpha = 10$$

следует, что $2\operatorname{tg}\alpha = 10$ или $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

21. Доказать, что $\operatorname{ctg}70^\circ + 4\cos70^\circ = \sqrt{3}$.

Решение. Используя формулы приведения, из заданного равенства $\operatorname{ctg}70^\circ + 4\cos70^\circ = \sqrt{3}$ получаем $\operatorname{tg}20^\circ + 4\sin20^\circ = \sqrt{3}$ или

$$\sin20^\circ = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}20^\circ}{4}. \qquad (*)$$

Докажем равенство $(*)$.

Так как

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta},$$

то имеет место следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}20^\circ}{4}=\frac{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}20^\circ}{4}=$$
$$=\frac{\sin 40^\circ}{4\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 20^\circ}=\frac{2\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}{4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\cos 20^\circ}=\sin 20^\circ.$$

Следовательно, справедливость равенства $(*)$, а вместе с ним и справедливость заданного равенства, доказаны.

22. Известно, что $\cos A=\operatorname{tg}B$, $\cos B=\operatorname{tg}C$, $\cos C=\operatorname{tg}A$ и $A, B, C\in(0,\pi/2)$. Доказать, что

$$\sin A=\sin B=\sin C=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Решение. Используя условия задачи, можно записать

$$\cos^2 A=\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}=\frac{1-\cos^2 B}{\cos^2 B}=\frac{1}{\cos^2 B}-1=$$
$$=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 C}-1}-1=\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 A}-1}-1}-1.$$

Если в полученном выражении заменить $\cos^2 A=x$, то после несложных преобразований получаем квадратное уравнение относительно переменной x вида $x=\dfrac{1-x}{2x-1}-1$ или $x^2+x-1=0$. Решая квадратное уравнение с учетом того, что $0<x<1$, получаем $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, т. е. $\cos^2 A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Тогда

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

или

$$\sin A=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}=$$
$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}=\frac{|\sqrt{5}-1|}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Проведя аналогичные рассуждения относительно $\cos B$, $\cos C$, получим $\sin A=\sin B=\sin C=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Примечание. При решении задачи использовался тот факт, что $A, B, C\in(0,\pi/2)$. Поскольку в этом случае обе части всех равенств $\cos A=\operatorname{tg}B$, $\cos B=\operatorname{tg}C$, $\cos C=\operatorname{tg}A$ являются положительными и после их возведения в квадрат не могут появиться посторонние значения $\sin A$, $\sin B$ и $\sin C$.

§ 2.5. Доказательство неравенств

23. Доказать, что для любого натурального n справедливо неравенство

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\geqslant n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right).$$

Решение. Обозначим $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}=S_n$, тогда требуется доказать неравенство $S_n+n\geqslant n\cdot\sqrt[n]{n+1}$.

Выражение $n+S_n$ оценим снизу на основе использования неравенства Коши (1) следующим образом:

$$n+S_n=n+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$
$$=(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n+1}{n}\geqslant n\cdot\sqrt[n]{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}}=$$
$$=n\cdot\sqrt[n]{n+1}.$$

Отсюда следует справедливость требуемого неравенства.

24. Доказать, что $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100}<\dfrac{1}{10}$.

Решение. Обозначим $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100}=x$. Далее, имеют место следующие неравенства: $\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{4}<\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{5}{6}<\dfrac{6}{7}$, $\ldots$, $\dfrac{99}{100}<\dfrac{100}{101}$.

Отсюда получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}$$

или

$$x<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}. \qquad (*)$$

Умножим левую часть неравенства $(*)$ на x, а правую его часть — на численное значение x. Тогда получим

$$x^2<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}=\frac{1}{101}<\frac{1}{100},$$

т. е. $x^2<\dfrac{1}{100}$ или $x<\dfrac{1}{10}$.

25. Пусть a, b — положительные числа и $a^3+b^3=a^5+b^5$. Доказать, что $a^2+b^2\leqslant 1+ab$.

Решение. Доказательство неравенства будем вести методом от противного. Предположим, что существуют такие положительные числа a и b, для которых справедливо равенство $a^3+b^3=a^5+b^5$ и имеет место неравенство $a^2+b^2>1+ab$.

Умножим обе части предполагаемого неравенства на a^3 и b^3. Тогда

$$a^3(a^2+b^2)>a^3(1+ab) \quad \text{и} \quad b^3(a^2+b^2)>b^3(1+ab).$$

После сложения приведенных выше неравенств получаем

$$a^5+a^3b^2+a^2b^3+b^5>a^3+a^4b+b^3+ab^4. \qquad (*)$$

Так как по условию $a^3+b^3=a^5+b^5$, то из неравенства $(*)$ вытекает

$$a^3b^2+a^2b^3>a^4b+ab^4, \quad a^2b+ab^2>a^3+b^3,$$
$$ab(a+b)>(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$ab>a^2-ab+b^2, \quad (a-b)^2<0.$$

Получили противоречие. Значит, если $a^3+b^3=a^5+b^5$, то требуемое неравенство верно для произвольных положительных чисел a и b.

26. Пусть $a+b+c=1$. Доказать, что $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

Решение. Покажем два способа решения этой задачи.

Способ 1. Из неравенства Коши—Буняковского (9) имеем

$$1=(a+b+c)^2=(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c)^2\leqslant$$
$$\leqslant(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)=3(a^2+b^2+c^2).$$

Отсюда получаем $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

Способ 2. Согласно условию можно записать

$$1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc. \qquad (*)$$

Так как $2ab\leqslant a^2+b^2$, $2ac\leqslant a^2+c^2$ и $2bc\leqslant b^2+c^2$ (справедливость которых следует, в частности, из неравенства Коши (2), то из равенства $(*)$ получаем $1\leqslant 3a^2+3b^2+3c^2$ или $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

Примечание. Используя неравенство Коши—Буняковского (9), можно доказать более общее утверждение.

Если $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$, то $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geqslant\dfrac{1}{n}$.

27. Пусть для произвольных чисел a, b, c выполняется условие $a^2+b^2+c^2=1$. Доказать, что $-\sqrt{3}\leqslant a+b+c\leqslant\sqrt{3}$.

Решение. Согласно неравенству Коши—Буняковского (9), имеем

$$(a+b+c)^2=(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c)^2\leqslant$$
$$\leqslant(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)=3(a^2+b^2+c^2).$$

Так как $a^2+b^2+c^2=1$, то

$$(a+b+c)^2\leqslant 3 \quad \text{или} \quad -\sqrt{3}\leqslant a+b+c\leqslant\sqrt{3}.$$

Примечание. Используя неравенство Коши—Буняковского (9), можно доказать более общее утверждение.

Если $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$, то $-\sqrt{n}\leqslant a_1+a_2+\ldots+a_n\leqslant\sqrt{n}$.

28. Доказать, что $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$ при условии, что $a+b+c=1$ и $4a+1\geqslant 0$, $4b+1\geqslant 0$, $4c+1\geqslant 0$.

Решение. Используя неравенство Коши (2), получаем

$$\sqrt{4a+1} = \sqrt{1\cdot(4a+1)} \leqslant \frac{1+4a+1}{2} = \frac{4a+2}{2} = 2a+1,$$
$$\sqrt{4b+1} \leqslant 2b+1 \quad \text{и} \quad \sqrt{4c+1} \leqslant 2c+1.$$

Так как $a+b+c=1$, то

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leqslant 2(a+b+c)+3=5.$$

Осталось доказать строгое неравенство. Известно, что неравенство Коши (2) превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$. Применительно к данному примеру, это условие означает, что $4a+1=1$, $4b+1=1$ и $4c+1=1$, т. е. $a=b=c=0$. Последнее равенство выполняться не может, так как по условию $a+b+c=1$.

Примечание. Данное неравенство можно доказать на основе применения неравенства Коши—Буняковского (9). Имеет место

$$\left(\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\right)^2 \leqslant (1^2+1^2+1^2)\cdot(4a+1+4b+1+4c+1).$$

Поскольку $a+b+c=1$, то отсюда получаем

$$\left(\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\right)^2 \leqslant 3\cdot 7 = 21 < 25, \quad \text{т. е.}$$
$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} < 5.$$

29. Доказать, что если x, y, z — действительные числа, удовлетворяющие условиям $x+y+z=5$ и $xy+xz+yz=8$, то $1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$, $1 \leqslant y \leqslant \frac{7}{3}$ и $1 \leqslant z \leqslant \frac{7}{3}$.

Решение. Из первого равенства получаем $y+z=5-x$. Тогда из второго равенства следует $x(y+z)+yz=8$, $yz=8-x(y+z)$, $yz=8-x(5-x)$ и

$$yz = x^2-5x+8. \qquad (*)$$

Поскольку для любого x справедливо неравенство

$$x^2-5x+8>0$$

(дискриминант уравнения $x^2-5x+8=0$ отрицательный), то из равенства $(*)$ следует, что $yz>0$. Проведя аналогичные рассуждения, можно показать, что $xy>0$ и $xz>0$. Отсюда следует,

что переменные x, y и z могут принимать только положительные или только отрицательные значения. Однако по условию $x+y+z=5$. Поэтому $x>0$, $y>0$ и $z>0$.

Кроме того, если $x+y+z=5$ и $x>0$, $y>0$, $z>0$, то $x<5$, $y<5$ и $z<5$.

Далее, применяя неравенство Коши (2), можно записать, что $y+z \geqslant 2\sqrt{yz}$. Тогда $5-x \geqslant 2\sqrt{yz}$ и $4yz \leqslant x^2-10x+25$. Отсюда и из равенства $(*)$ получаем неравенства

$$4(x^2-5x+8) \leqslant x^2-10x+25 \quad \text{или} \quad 3x^2-10x+7 \leqslant 0,$$

решением которых являются $1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$.

Повторив приведенные выше рассуждения для переменных y и z, докажем требуемые неравенства относительно y, z.

30. Доказать неравенство $\frac{x}{y} + 2\cdot\sqrt{\frac{y}{z}} + 3\cdot\sqrt[3]{\frac{z}{x}} \geqslant 6$, где $x>0$, $y>0$ и $z>0$.

Решение. Воспользуемся неравенством Коши (1) при $n=6$, тогда

$$\frac{x}{y} + 2\cdot\sqrt{\frac{y}{z}} + 3\cdot\sqrt[3]{\frac{z}{x}} = \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x}} \geqslant$$
$$\geqslant 6\cdot\sqrt[6]{\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{y}{z}}\cdot\sqrt{\frac{y}{z}}\cdot\sqrt[3]{\frac{z}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{z}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{z}{x}}} = 6\cdot\sqrt[6]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}} = 6.$$

Следовательно, требуемое неравенство доказано.

Примечание. Доказанное выше неравенство обобщается на тот случай, когда в его левой части находится n слагаемых, т. е. имеет место

$$\frac{x_1}{x_2} + 2\cdot\sqrt{\frac{x_2}{x_3}} + \ldots + n\cdot\sqrt[n]{\frac{x_n}{x_1}} \geqslant \frac{n\cdot(n+1)}{2},$$

где $n \geqslant 1$. Причем равенство в данном неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

31. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

Решение. Используя неравенство Коши (1) при $n = 5$, запишем

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} = \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} \geqslant$$
$$\geqslant 5 \cdot \sqrt[5]{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b}} = 5 \cdot \sqrt[5]{ab},$$

т. е. требуемое неравенство доказано.

32. Доказать неравенство $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant abc + abd + acd + bcd$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$.

Решение. Представим левую часть неравенства как

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + d^3) +$$
$$+ \frac{1}{3}(a^3 + c^3 + d^3) + \frac{1}{3}(b^3 + c^3 + d^3).$$

Теперь применим четыре раза (по числу пар скобок) неравенство Коши (1) при $n = 3$ и получим неравенства $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$, $a^3+b^3+d^3 \geqslant 3abd$, $a^3+c^3+d^3 \geqslant 3acd$, $b^3+c^3+d^3 \geqslant 3bcd$. Отсюда следует требуемое неравенство.

33. Доказать, что $\dfrac{1}{a-2} + \dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a+2} > \dfrac{4}{a}$, где $a > 2$.

Решение. Так как по условию $a > 2$, то $\dfrac{1}{a-2} > 0$, $\dfrac{1}{a-1} > 0$, $\dfrac{1}{a+1} > 0$, $\dfrac{1}{a+2} > 0$ и в этой связи можно воспользоваться неравенством (5). Тогда

$$\frac{1}{a-2} + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} \geqslant \frac{16}{a-2+a-1+a+1+a+2} = \frac{4}{a}.$$

Осталось показать, что $\dfrac{1}{a-2} + \dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a+2} \neq \dfrac{4}{a}$. Однако данное неравенство легко следует из того факта, что $\dfrac{1}{a-2} \neq \dfrac{1}{a-1} \neq \dfrac{1}{a+1} \neq \dfrac{1}{a+2}$.

34. Доказать неравенство $1 + 2a^4 \geqslant a^2 + 2a^3$.

Решение. Применяя (дважды) неравенство Коши (1) при $n = 2$ и $n = 4$, получаем $1 + a^4 \geqslant 2a^2$ и $1 + a^4 + a^4 + a^4 \geqslant 4a^3$. Если сложить приведенные выше неравенства, то $2 + 4a^4 \geqslant 2a^2 + 4a^3$. Отсюда следует требуемое неравенство.

Примечание. Аналогичным образом можно доказать более сложные неравенства, к которым относится, например, неравенство $1 + 2a^2 + b^6 \geqslant 3ab + ab^3$, где a, b — произвольные действительные числа.

Для доказательства данного неравенства воспользуемся (дважды) неравенством Коши (1) и получим следующие два соотношения:

$$a^2 + b^6 \geqslant 2\sqrt{a^2 \cdot b^6} = 2ab^3,$$
$$1 + 1 + a^2 + a^2 + a^2 + b^6 \geqslant 6 \cdot \sqrt[6]{1 \cdot 1 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot b^6} = 6ab,$$

откуда следует $a^2 + b^6 \geqslant 2ab^3$ и $2 + 3a^2 + b^6 \geqslant 6ab$. Если сложить левые и правые части полученных неравенств, то $2 + 4a^2 + 2b^6 \geqslant 6ab + 2ab^3$.

Значит, требуемое неравенство доказано.

35. Доказать, что

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $abc = 1$.

Решение. Поскольку $abc = 1$, то переменные a, b, c можно представить в виде $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$ и $c = \dfrac{z}{x}$. В таком случае требуемое неравенство будет равносильно неравенству

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leqslant xyz, \qquad (*)$$

где $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Введем новые переменные $u = x - y + z$, $v = y - z + x$ и $w = z - x + y$, тогда $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{v+w}{2}$, $z = \dfrac{u+w}{2}$ и неравенство $(*)$ принимает вид

$$(u + v)(v + w)(u + w) \geqslant 8uvw, \qquad (**)$$

где $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$.

Справедливость неравенства $(**)$ легко следует из неравенства Коши (2), так как

$$u + v \geqslant 2\sqrt{uv}, \quad v + w \geqslant 2\sqrt{vw} \quad \text{и} \quad u + w \geqslant 2\sqrt{uw}.$$

Следовательно, требуемое неравенство доказано.

Примечание. Доказательство неравенств (∗) и (∗∗) можно рассматривать как самостоятельные задачи.

36. Доказать, что

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right),$$

где $n \geqslant 2$.

Решение. Для произвольного действительного x выполняется очевидное неравенство $(a_1+xb_1)^2+(a_2+xb_2)^2+\ldots+(a_n+xb_n)^2 \geqslant 0$.

Отсюда после раскрытия скобок получаем квадратное неравенство относительно переменной x вида

$$x^2\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)+2x\cdot\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)+ \\ +\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right) \geqslant 0.$$

Поскольку квадратный трехчлен при любом x принимает неотрицательные значения, то его дискриминант меньше или равен 0, т. е.

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2-\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right) \leqslant 0.$$

Отсюда следует справедливость неравенства Коши—Буняковского (9).

37. Доказать неравенство $\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}} < \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$, где $a>0$.

Решение. Очевидно, что

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}} < \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}},$$

где $a>0$. Обозначим $x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}$ и возведем обе части выражения в квадрат, тогда получим уравнение $x^2-x-a=0$.

Поскольку $a>0$, то квадратное уравнение имеет единственный положительный корень $x_1=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Отсюда вытекает требуемое неравенство.

38. Доказать, что $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \dfrac{1}{2}$, где x, y — произвольные действительные числа.

Решение. Пусть $x=\operatorname{tg}\alpha$ и $y=\operatorname{tg}\beta$, где $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

В таком случае

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)}= \\ =\frac{\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cdot\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\beta}}= \\ =\sin(\alpha+\beta t)\cdot\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\beta.$$

Так как $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta) \leqslant \dfrac{1}{2}$, то требуемые неравенства доказаны.

39. Доказать, что при любых действительных x, y имеет место неравенство $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3 \geqslant 0$.

Решение. Рассмотрим левую часть неравенства. Имеет место

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3= \\ =x^2+2x(y+1)+(y+1)^2-(y+1)^2+3y^2+6y+3= \\ =(x+y+1)^2-y^2-2y-1+3y^2+6y+3= \\ =(x+y+1)^2+2(y+1)^2 \geqslant 0.$$

40. Доказать неравенство $2+2\cos x-\sin^2 x+\cos^2(x-1)>0$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства

$$2+2\cos x-\sin^2 x+\cos^2(x-1)= \\ =2+2\cos x-1+\cos^2 x+\cos^2(x-1)= \\ =(\cos x+1)^2+\cos^2(x-1) \geqslant 0.$$

Докажем теперь строгое неравенство.

Предположим, что $\begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos(x-1) = 0. \end{cases}$ Отсюда получаем

$$\begin{cases} x = \pi + 2\pi n, \\ x - 1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases}$$

где n, k — целые числа.

Следовательно, имеет место равенство

$$\pi + 2\pi n = \frac{\pi}{2} + \pi k + 1.$$

Тогда $\pi = \dfrac{2}{4n - 2k + 1}$, т. е. π — рациональное число, что является противоречием. Значит, доказано, что

$$2 + 2\cos x - \sin^2 x + \cos^2(x-1) > 0.$$

41. Доказать, если $0 < x < y < z$, то $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} > \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z}$.

Решение. Так как $0 < x < y < z$, то $\dfrac{x}{y} < 1$, $\dfrac{y}{z} < 1$, $\dfrac{z}{x} > 1$.

Поэтому

$$\frac{x}{y} - 1 < 0, \quad \frac{y}{z} - 1 < 0, \quad \frac{z}{x} - 1 > 0 \quad \text{и}$$

$$\left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(\frac{y}{z} - 1\right)\left(\frac{z}{x} - 1\right) > 0.$$

Отсюда после раскрытия скобок получаем требуемое неравенство.

42. Пусть $0 < a < b < c$. Доказать, что

$$a^2b + b^2c + c^2a < b^2a + c^2b + a^2c.$$

Решение. Поскольку $0 < a < b < c$, то $b - a > 0$, $c - b > 0$ и $a - c < 0$. Тогда $(b-a)\cdot(c-b)\cdot(a-c) < 0$. Если в левой части неравенства раскрыть скобки, то получим неравенство

$$a^2b + b^2c + c^2a < b^2a + c^2b + a^2c.$$

43. Доказать, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, то

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Решение. Воспользуемся неравенством Коши—Буняковского (9), тогда

$$(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 \leqslant \left((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{c})^2\right)\left((\sqrt{b})^2 + (\sqrt{d})^2\right) = (a+c)(b+d).$$

Отсюда следует справедливость требуемого неравенства.

44. Доказать, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $a + b > 0$, $a + c > 0$, $b + c > 0$, то

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geqslant 3.$$

Решение. Введем новые переменные $x = b + c$, $y = a + c$, $z = a + b$. Тогда

$$2a + 2b + 2c = x + y + z, \quad 2a = x + y + z - 2,$$
$$(b + c) = -x + y + z, \quad 2b = x - y + z, \quad 2c = x + y - z$$

и требуемое неравенство принимает вид

$$\frac{-x + y + z}{x} + \frac{x - y + z}{y} + \frac{x + y - z}{z} \geqslant 3. \qquad (*)$$

Из неравенства $(*)$ получаем

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geqslant 6. \qquad (**)$$

Так как $a + b > 0$, $a + c > 0$, $b + c > 0$, то $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Принимая во внимание неравенство Коши (3), оценим левую часть неравенства $(**)$ следующим образом:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geqslant 2 + 2 + 2 = 6.$$

45. Доказать, если $a + b + c = 1$ и $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\sqrt{\frac{ab}{ab + c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc + a}} + \sqrt{\frac{ac}{ac + b}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. Используя неравенство Коши (2) и тот факт, что $a+b+c=1$, можно записать

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}=\sqrt{\frac{ab}{ab+(1-a-b)}}=\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}}=$$
$$=\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}}=\sqrt{\frac{a}{a+c}\cdot\frac{b}{b+c}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right).$$

Проведя аналогичные рассуждения, получаем еще два неравенства

$$\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)\quad\text{и}\quad\sqrt{\frac{ac}{ac+b}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right).$$

Если сложить полученные выше три неравенства, то

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ac}{ac+b}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)=\frac{3}{2}.$$

46. Доказать, если $a+b+c\leqslant 3$ и $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0$, то

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Решение. Покажем, что заданное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geqslant\frac{3}{2}.\qquad(*)$$

Для этого преобразуем требуемое неравенство следующим образом:

$$\frac{a+1-1}{a+1}+\frac{b+1-1}{b+1}+\frac{c+1-1}{c+1}\leqslant\frac{3}{2},$$
$$1-\frac{1}{a+1}+1-\frac{1}{b+1}+1-\frac{1}{c+1}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Отсюда следует неравенство $(*)$.

Для доказательства неравенства $(*)$ применим к левой его части неравенство (5), тогда с учетом того, что $a+b+c\leqslant 3$, получаем

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geqslant\frac{9}{a+b+c+3}\geqslant\frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

Другими словами, справедливость неравенства $(*)$ доказывается путем двукратного применения к его левой части неравенства Коши (1) при $n=3$.

47. Доказать, если

$$a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0,\quad\text{то}\quad\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Решение. Доказательство требуемого неравенства будем вести методом от противного. Предположим, что при некоторых неотрицательных a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{a+b+c}{3}>\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.\qquad(*)$$

Возведем в квадрат обе части неравенства $(*)$, тогда

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}>a^2+b^2+c^2,$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc>3a^2+3b^2+3c^2,$$
$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc<0,$$
$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2<0.$$

Поскольку каждое из слагаемых полученного выражения неотрицательно, то получили противоречие, которое доказывает справедливость требуемого неравенства.

48. Доказать, если $a>0,\ b>0,\ c>0$, то

$$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2+\left(\frac{b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{b}\right)^2\geqslant 27.$$

Решение. Оценим снизу каждое слагаемое левой части неравенства, применяя для этого неравенство Коши (1) при $n=3$. Имеет место

$$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2=\left(\frac{a+b+b}{c}\right)^2\geqslant\left(\frac{3\cdot\sqrt[3]{ab^2}}{c}\right)^2=\frac{9\cdot\sqrt[3]{a^2b^4}}{c^2}.$$

По аналогии с приведенным выше неравенством получаем

$$\left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 \geqslant \frac{9\cdot\sqrt[3]{b^2c^4}}{a^2} \quad\text{и}\quad \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \geqslant \frac{9\cdot\sqrt[3]{c^2a^4}}{b^2}.$$

Отсюда следует

$$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2+\left(\frac{b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{9\cdot\sqrt[3]{a^2b^4}}{c^2}+\frac{9\cdot\sqrt[3]{b^2c^4}}{a^2}+\frac{9\cdot\sqrt[3]{c^2a^4}}{b^2} \geqslant$$
$$\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{9\cdot9\cdot9\cdot\sqrt[3]{a^2b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2c^4}\cdot\sqrt[3]{c^2a^4}}{a^2b^2c^2}}=27.$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано.

49. Доказать неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{4y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{4x^2+1}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где $0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$ и $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$.

Решение. Обозначим $a=2x$ и $b=2y$, тогда требуемое неравенство принимает вид

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\leqslant\sqrt{2}, \qquad (*)$$

где $0\leqslant a\leqslant 1$ и $0\leqslant b\leqslant 1$.

Так как $0\leqslant a\leqslant 1$, $0\leqslant b\leqslant 1$, то

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\leqslant\frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (**)$$

Неравенство (10) при $n=2$ принимает вид

$$(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2),$$

из которого вытекает $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{2}$. Отсюда и из неравенства $(**)$ следует справедливость требуемого неравенства.

50. Доказать неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}}+\frac{y}{\sqrt{2x^2+3}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$$

где $0\leqslant x\leqslant 1$ и $0\leqslant y\leqslant 1$.

Решение. Поскольку $0\leqslant x\leqslant 1$ и $0\leqslant y\leqslant 1$, то

$$\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}}+\frac{y}{\sqrt{2x^2+3}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{x}{\sqrt{2x^2+2y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{2x^2+2y^2+1}}=\frac{x+y}{\sqrt{2x^2+2y^2+1}}. \quad (*)$$

Используя неравенство $(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)=2x^2+2y^2$, которое следует из (10) при $n=2$, а также тот факт, что $x\leqslant 1$ и $y\leqslant 1$, из неравенства $(*)$ получаем

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}}+\frac{y}{\sqrt{2x^2+3}}\right)^2\leqslant\frac{(x+y)^2}{2x^2+2y^2+1}\leqslant\frac{2x^2+2y^2}{2x^2+2y^2+1}=$$
$$=1-\frac{1}{2x^2+2y^2+1}\leqslant 1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

Отсюда вытекает справедливость требуемого неравенства.

51. Доказать неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{y-1}}+\frac{y}{\sqrt{z-1}}+\frac{z}{\sqrt{x-1}}\geqslant 6,$$

где $x>1$, $y>1$ и $z>1$.

Решение. Так как $x>1$, то $x-1>0$. Тогда, применяя неравенство Коши (2), можно оценить снизу первое слагаемое левой части заданного неравенства следующим образом:

$$\frac{x}{\sqrt{y-1}}=\frac{x-1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}\geqslant$$
$$\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{x-1}{\sqrt{y-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y-1}}}=2\cdot\sqrt{\frac{x-1}{y-1}}.$$

Проведя аналогичные рассуждения, получаем

$$\frac{y}{\sqrt{z-1}}\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{y-1}{z-1}} \quad\text{и}\quad \frac{z}{\sqrt{x-1}}\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{z-1}{x-1}}.$$

Если использовать приведенные выше неравенства, а также еще раз применить неравенство Коши (1) при $n = 3$, то

$$\frac{x}{\sqrt{y-1}} + \frac{y}{\sqrt{z-1}} + \frac{z}{\sqrt{x-1}} \geqslant$$
$$\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{x-1}{y-1}} + 2\cdot\sqrt{\frac{y-1}{z-1}} + 2\cdot\sqrt{\frac{z-1}{x-1}} \geqslant$$
$$\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{\frac{x-1}{y-1}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{y-1}{z-1}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{z-1}{x-1}}} = 6.$$

52. Доказать неравенство $\sqrt{x+1} > 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$, где $x > 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+1} - 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8}$. Очевидно, что $f(0) = 0$. Для доказательства требуемого неравенства достаточно показать, что на множестве $x > 0$ функция $y = f(x)$ является непрерывной и возрастающей, т. е. для любых $x > 0$ имеет место неравенство $f(x) > f(0)$ или $f(x) > 0$.

С этой целью вычислим производную функции $y = f(x)$ по переменной x, т. е. $f'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4}$. Согласно неравенству Коши (2), можно записать

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{1\cdot(x+1)} \leqslant \frac{1+x+1}{2} = \frac{x+2}{2}$$

и в таком случае

$$f'_x \geqslant \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{x+2} + \frac{x+2}{2} - 2\right).$$

Так как $x > 0$, то $0 < \dfrac{2}{x+2} < 1$ и с учетом неравенства Коши (3) получаем $\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{x+2}{2} > 2$. А это означает, что $f'_x > 0$.

Следовательно, если $x > 0$, то $f(x) > 0$, т. е. требуемое неравенство доказано.

§ 2.6. Рациональные уравнения

53. $(3x+5)^2 + (x+6)^3 = 4x^2 + 1.$

Решение. Преобразуем исходное уравнение к равносильному виду

$$\big((3x+5)^2 - (2x)^2\big) + \big((x+6)^3 - 1^3\big) = 0,$$
$$(x+5)(5x+5) + (x+5)(x^2+13x+43) = 0,$$
$$(x+5)(x^2+18x+48) = 0.$$

Рассматривая два уравнения $x+5=0$ и $x^2+18x+48=0$, получаем три корня заданного уравнения $x_1=-5$, $x_2=-9-\sqrt{33}$ и $x_3=-9+\sqrt{33}$.

54. $(x^2-x-1)^2 - x^3 = 5.$

Решение. Исходное уравнение равносильно следующим уравнениям:

$$\big((x^2-x-1)^2 - 2^2\big) - (x^3+1^3) = 0,$$
$$(x^2-x+1)(x^2-x-3) - (x+1)(x^2-x+1) = 0,$$
$$(x^2-x+1)(x^2-2x-4) = 0.$$

Так как $x^2-x+1 > 0$, то необходимо рассмотреть только одно уравнение $x^2-2x-4=0$, из которого получаем $x_1 = 1+\sqrt{5}$ и $x_2 = 1-\sqrt{5}$.

55. $x^2(x-1)^2 + (x-2)^3 = 76.$

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$x^2(x-1)^2 - 7^2 + (x-2)^3 - 3^3 = 0$$

и воспользуемся формулами разности квадратов и разности кубов, тогда

$$\big(x(x-1)-7\big)\cdot\big(x(x-1)+7\big) + (x-5)\cdot\big((x-2)^2+3(x-2)+9\big) = 0,$$
$$(x^2-x-7)\cdot(x^2-x+7) + (x-5)\cdot(x^2-x+7) = 0,$$
$$(x^2-x+7)\cdot(x^2-12) = 0.$$

Так как $x^2-x+7>0$, то рассматриваем только уравнение $x^2-12=0$, Получаем $x_1 = 2\sqrt{3}$ и $x_2 = -2\sqrt{3}$.

56. $(x-5)^2+(x-4)^3+(x-3)^4=2.$

Решение. Заданное уравнение равносильно уравнениям:

$$\big((x-5)^2-1^2\big)+(x-4)^3+\big((x-3)^4-1^4\big)=0,$$
$$(x-4)(x-6)+(x-4)(x^2-8x+16)+$$
$$+(x-4)(x-2)(x^2-6x+10)=0,$$
$$(x-4)(x^2-7x+10)+(x-4)(x-2)(x^2-6x+10)=0,$$
$$(x-4)(x-2)\big(x^2-5x+5\big)=0.$$

Отсюда получаем корни уравнения

$$x_1=2,\quad x_2=4,\quad x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt5}{2}.$$

57. $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0.$

Решение. Так как $x\neq0$ (в этом нетрудно убедиться путем подстановки в исходное уравнение $x=0$), то разделим обе части уравнения на x^2 и получим квадратное уравнение

$$y^2+8y+15=0, \qquad (*)$$

где $y=\dfrac{x^2+x+4}{x}$.

Уравнение $(*)$ имеет два корня $y_1=-5$ и $y_2=-3$. Поэтому необходимо рассмотреть два уравнения

$$\frac{x^2+x+4}{x}=-5 \quad\text{и}\quad \frac{x^2+x+4}{x}=-3.$$

Корнями первого уравнения являются

$$x_1=-3+\sqrt5 \quad\text{и}\quad x_2=-3-\sqrt5,$$

а второе уравнение имеет корень $x_3=-2$.

58. $x^2(x^4+36)-6\sqrt3(x^4+4)=0.$

Решение. После раскрытия скобок в левой части уравнения получаем

$$x^6-6\sqrt3x^4+36x^2-24\sqrt3=0 \quad\text{или}\quad \big(x^2-2\sqrt3\big)^3=0.$$

Отсюда следует $x^2=2\sqrt3$ и $x_1=\sqrt[4]{12}$, $x_2=-\sqrt[4]{12}$.

59. $(x^2+2x-1)^2+2x^2+3x=3.$

Решение. Представим уравнение в равносильном виде

$$(x^2+2x-1)^2+2(x^2+2x-1)+1=x+2. \qquad (*)$$

Левая часть уравнения $(*)$ представляет полный квадрат, поэтому имеем

$$(x^2+2x)^2=x+2,$$
$$x^2\cdot(x+2)^2=x+2,$$
$$(x+2)(x^3+2x^2-1)=0$$

или

$$(x+1)(x+2)(x^2+x-1)=0.$$

Отсюда получаем

$$x_1=-1,\quad x_2=-2,\quad x_3=\frac{-1+\sqrt5}{2}\quad\text{и}\quad x_4=\frac{-1-\sqrt5}{2}.$$

60. $x^2+2x+3=(x^2+x+1)(x^4+x^2+4).$

Решение. Так как

$$x^2+x+1>0 \quad\text{и}\quad x^4+x^2+4\geqslant4,$$

то

$$x^2+2x+3\geqslant4(x^2+x+1).$$

Отсюда получаем квадратное неравенство $3x^2+2x+1\leqslant0$. Однако данное неравенство противоречиво, поскольку

$$3x^2+2x+1=3\left(x+\frac13\right)^2+\frac23\geqslant\frac23.$$

Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

61. $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=1.$

Решение. Первоначально умножим обе части уравнения на 12, а затем обозначим $6x+7=y$. Тогда исходное уравнение преобразуется следующим образом: $(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=12$, $y^2(y+1)(y-1)=12$ или $y^4-y^2-12=0$.

Решая биквадратное уравнение $y^4 - y^2 - 12 = 0$, получаем $y^2 = 4$ (помним, что $y^2 \geqslant 0$) или $y_1 = 2$, $y_2 = -2$.

Поскольку $6x + 7 = y$, то $x = \dfrac{y-7}{6}$. Тогда

$$x_1 = \frac{y_1 - 7}{6} = \frac{2-7}{6} = -\frac{5}{6}$$

и

$$x_2 = \frac{y_2 - 7}{6} = \frac{-2-7}{6} = -\frac{3}{2}.$$

62. $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = 10x^2$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения следующим образом:

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = \big((x-1)(x-8)\big)\cdot\big((x-2)(x-4)\big) = \\ = (x^2-9x+8)(x^2-6x+8).$$

Следовательно, заданное уравнение равносильно уравнению

$$(x^2-9x+8)(x^2-6x+8) = 10x^2. \qquad (*)$$

Так как $x = 0$ не является корнем уравнения $(*)$, то обе его части можно разделить на x^2, тогда $\left(x - 9 + \dfrac{8}{x}\right)\left(x - 6 + \dfrac{8}{x}\right) = 10$.

Пусть $x - 9 + \dfrac{8}{x} = y$, тогда $y(y+3) = 10$ или $y^2 + 3y - 10 = 0$. Корнями последнего уравнения являются $y_1 = 2$ и $y_2 = -5$.

Поскольку $x - 9 + \dfrac{8}{x} = y$, то рассмотрим два уравнения относительно переменной x вида

$$x - 9 + \frac{8}{x} = 2 \quad \text{и} \quad x - 9 + \frac{8}{x} = -5.$$

Отсюда получаем два квадратных уравнения $x^2 - 11x + 8 = 0$ и $x^2 - 4x + 8 = 0$. Корнями первого уравнения являются $x_1 = \dfrac{11+\sqrt{89}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{11-\sqrt{89}}{2}$, а второе уравнение корней не имеет.

63. $\dfrac{x+1}{x^2+2x} + \dfrac{x+6}{x^2+12x+35} = \dfrac{x+2}{x^2+4x+3} + \dfrac{x+5}{x^2+10x+24}$.

Решение. Выполним следующие равносильные преобразования:

$$\frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{x+6}{(x+5)(x+7)} = \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} + \frac{x+5}{(x+4)(x+6)},$$

$$\frac{x+(x+2)}{x(x+2)} + \frac{(x+5)+(x+7)}{(x+5)(x+7)} = \\ = \frac{(x+1)+(x+3)}{(x+1)(x+3)} + \frac{(x+4)+(x+6)}{(x+4)(x+6)},$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6},$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7}\right) + \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5}\right) = \\ = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6}\right) + \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right),$$

$$\frac{2x+7}{x^2+7x} + \frac{2x+7}{x^2+7x+10} = \frac{2x+7}{x^2+7x+6} + \frac{2x+7}{x^2+7x+12}. \qquad (*)$$

Из уравнения $(*)$ следует, что $2x + 7 = 0$, т. е. $x_1 = -3\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения $(*)$.

Пусть теперь $2x + 7 \neq 0$. Разделим обе части уравнения $(*)$ на $2x+7$, затем обозначим $x^2 + 7x = y$. Тогда получим уравнение

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y+10} = \frac{1}{y+6} + \frac{1}{y+12}. \qquad (**)$$

После приведения дробей к общему знаменателю уравнение $(*)$ принимает вид квадратного уравнения относительно переменной y, т. е. $y^2 + 18y + 90 = 0$. Данное уравнение действительных корней не имеет.

Значит, исходное уравнение имеет единственный корень

$$x_1 = -3\frac{1}{2}.$$

64. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+4} = 0$.

Решение. Если сгруппировать слагаемые левой части уравнения как

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{x+2}=0,$$

то получим уравнение

$$\frac{2(x+2)}{x^2+4x}+\frac{2(x+2)}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x+2}=0. \qquad (*)$$

Так как $x\neq -2$, то разделим обе части уравнения $(*)$ на $x+2$. Тогда

$$\frac{2}{x^2+4x}+\frac{2}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+4x+4}=0. \qquad (**)$$

Если обозначить $x^2+4x=y$, то уравнение $(*)$ принимает вид

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{y+3}+\frac{1}{y+4}=0 \quad \text{или} \quad 5y^2+25y+24=0.$$

Корнями последнего уравнения являются

$$y_{1,2}=\frac{-25\pm\sqrt{145}}{10}.$$

Поскольку $y=x^2+4x$, то для нахождения x необходимо рассмотреть два уравнения

$$x^2+4x=\frac{-25-\sqrt{145}}{10} \quad \text{и} \quad x^2+4x=\frac{-25+\sqrt{145}}{10}.$$

Отсюда получаем четыре корня заданного уравнения

$$x_1=-2+\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}, \quad x_2=-2-\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}},$$

$$x_3=-2+\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}, \quad x_4=-2-\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}.$$

65. $x^4=\dfrac{11x-6}{6x-11}$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении является объединение двух множеств $x\leqslant\dfrac{6}{11}$ и $x>\dfrac{11}{6}$.

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$6x^5-11x^4-11x+6=0,$$

$$6(x^5+1)-11x(x^3+1)=0,$$

$$6(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)-11x(x+1)(x^2-x+1)=0,$$

$$(x+1)(6x^4-17x^3+17x^2-17x+6)=0.$$

Отсюда получаем первый корень заданного уравнения $x_1=-1$. Далее, рассмотрим уравнение

$$6x^4-17x^3+17x^2-17x+6=0. \qquad (*)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $x=0$ не является корнем уравнения $(*)$. Далее, разделим обе части уравнения на x^2 и обозначим $x+\dfrac{1}{x}=y$. Тогда

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

и уравнение $(*)$ принимает вид квадратного уравнения относительно переменной y вида

$$6y^2-17y+5=0,$$

корнями которого являются

$$y_1=\frac{5}{2} \quad \text{и} \quad y_2=\frac{1}{3}.$$

Так как $y=x+\dfrac{1}{x}$, то $|y|\geqslant 2$ и $y=\dfrac{5}{2}$, т. е. $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ и $2x^2-5x+2=0$, откуда получаем $x_2=2$ и $x_3=\dfrac{1}{2}$.

66. $\dfrac{x^4+1}{x(x^2+1)}=\dfrac{41}{15}$

Решение. Поскольку $x\neq 0$, то числитель и знаменатель дроби в левой части уравнения можно разделить на x^2. Тогда

$$\frac{x^2+\dfrac{1}{x^2}}{x+\dfrac{1}{x}}=\frac{41}{15}. \qquad (*)$$

Если положить $y = x + \dfrac{1}{x}$, то $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$ и из уравнения $(*)$ получаем

$$\frac{y^2-2}{y} = \frac{41}{15} \quad \text{и} \quad 15y^2 - 41y - 30 = 0,$$

корнями которого являются

$$y_1 = \frac{10}{3} \quad \text{и} \quad y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Так как $y = x + \dfrac{1}{x}$, то $|y| \geqslant 2$. Поэтому необходимо рассмотреть только одно уравнение

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}, \quad \text{т. е.} \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0,$$

решая которое получим $x_1 = 3$ и $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

67. $(x^2 + x + 1)^2 = x^2(3x^2 + x + 1)$.

Решение. Первоначально убедимся в том, что $x \neq 0$. Далее, обе части уравнения разделим на x^4 и получим уравнение

$$\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}. \qquad (*)$$

Обозначим $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = y$, тогда уравнение $(*)$ принимает вид $y^2 = y + 2$ или $y^2 - y - 2 = 0$. Отсюда получаем $y_1 = 2$ и $y_2 = -1$.

Рассмотрим два уравнения

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{и} \quad 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = -1,$$

которые равносильны уравнениям

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x^2 + x + 1 = 0.$$

Первое из этих уравнений имеет два корня

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

а второе корней не имеет.

68. $x = 1 - 5(1 - 5x^2)^2$.

Решение. Введем новую переменную $u = 1 - 5x^2$. Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = 1 - 5u^2, \\ u = 1 - 5x^2, \end{cases} \qquad (*)$$

где $x \leqslant 1$ и $u \leqslant 1$.

Если из первого уравнения системы $(*)$ вычесть второе уравнение, то $x - u = 5(x^2 - u^2)$ или $(x - u)(5x + 5u - 1) = 0$.

Пусть $x - u = 0$, тогда $x = u$ и первое уравнение системы $(*)$ принимает вид $5x^2 + x - 1 = 0$. Отсюда получаем

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{10} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{10}.$$

Пусть $5x + 5u - 1 = 0$. Тогда $u = \dfrac{1-5x}{5}$ и из второго уравнения системы $(*)$ вытекает квадратное уравнение $25x^2 - 5x - 4 = 0$, корнями которого являются $x_3 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{10}$ и $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{10}$.

Отметим, что при найденных значениях x переменная $u < 1$.

69. $\dfrac{x^2 - x - 1}{2x^2 + x - 2} = \dfrac{x}{3x^2 - x - 3}$.

Решение. Непосредственной подстановкой в заданное уравнение убеждаемся в том, что $x \neq 0$.

Разделим числители и знаменатели обеих дробей в уравнении на x, тогда получим

$$\frac{x - 1 - \dfrac{1}{x}}{2x + 1 - \dfrac{2}{x}} = \frac{1}{3x - 1 - \dfrac{3}{x}}. \qquad (*)$$

Обозначим $x - \dfrac{1}{x} = y$, тогда уравнение $(*)$ можно переписать как $\dfrac{y-1}{2y+1} = \dfrac{1}{3y-1}$, т. е.

$$3y^2 - 4y + 1 = 2y + 1, \quad y(y-2) = 0 \quad \text{и} \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 2.$$

Если $y_1 = 0$, то $x - \dfrac{1}{x} = 0$ и $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Если $y_2 = 2$, то $x - \dfrac{1}{x} = 2$ и $x_3 = 1 + \sqrt{2}$, $x_4 = 1 - \sqrt{2}$.

70. $\dfrac{24}{x^2 - 2x} = \dfrac{12}{x^2 - x} + x^2 - x$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x \neq 0$, $x \neq 1$ и $x \neq 2$. Далее, преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{24}{x^2 - 2x} - \frac{12}{x^2 - x} = x^2 - x, \qquad \frac{12}{(x-1)(x-2)} = x^2 - x,$$

$$x(x-1)^2(x-2) = 12, \qquad (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 1) = 12.$$

Пусть $x^2 - 2x = y$, тогда $y(y+1) = 12$ или $y^2 + y - 12 = 0$. Отсюда получаем $y_1 = -4$ и $y_2 = 3$.

Так как $x^2 - 2x = y$, то рассмотрим два уравнения

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Первое уравнение корней не имеет, а из второго получаем

$$x_1 = -1 \quad \text{и} \quad x_2 = 3.$$

71. $x^2 + \dfrac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, используя очевидное равенство $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$. Тогда имеет место

$$x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = \left(x - \frac{9x}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} = \left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9}.$$

Введем новую переменную $y = \dfrac{x^2}{x+9}$. В таком случае заданное уравнение принимает вид $y^2 + 18y - 40 = 0$. Отсюда получаем $y_1 = 2$ и $y_2 = -20$. Рассмотрим два уравнения относительно переменной x.

1) Если $\dfrac{x^2}{x+9} = 2$, то $x^2 - 2x - 18 = 0$ и

$$x_1 = 1 + \sqrt{19}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{19}.$$

2) Если $\dfrac{x^2}{x+9} = -20$, то $x^2 + 20x + 180 = 0$. Однако дискриминант этого уравнения отрицательный и поэтому уравнение корней не имеет.

72. $10x^2(x-2)^2 = 9(x^2 + (x-2)^2)$.

Решение. Как и при решении задачи 71, воспользуемся очевидным соотношением $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$. Тогда уравнение принимает вид $10x^2(x-2)^2 = 9\big((x - (x-2))^2 + 2x(x-2)\big)$ или $5x^2(x-2)^2 = 9\big(2 + x(x-2)\big)$.

Если обозначить $x(x-2) = y$, то получим квадратное уравнение $5y^2 - 9y - 18 = 0$, корнями которого являются $y_1 = 3$ и $y_2 = -\dfrac{6}{5}$.

Так как $x(x-2) = y$, то рассмотрим два уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$ и $5x^2 - 10x + 6 = 0$. Первое уравнение имеет корни $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$, а второе уравнение корней не имеет.

73. $2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1$.

Решение. Преобразуем заданное уравнение следующим образом:

$$2x^4 + 2y^4 - 4x^2y^2 = -4x^2y^2 + 4xy - 1,$$

$$2(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 1^2) = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ 2xy = 1, \end{cases}$$

корнями которой являются $x_1 = y_1 = \sqrt{2}/2$ и $x_2 = y_2 = -\sqrt{2}/2$.

74. $\dfrac{3}{x^2+3} + \dfrac{4}{x^2+4} = \dfrac{(x+1)^4 + 1}{(x+1)^2}$.

Решение. Так как $x^2 \geqslant 0$, то левая часть уравнения не превосходит 2. Для оценки правой части уравнения воспользуемся неравенством Коши (3), т. е.

$$\frac{(x+1)^4 + 1}{(x+1)^2} = (x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2} \geqslant 2.$$

Следовательно, равенство в уравнении имеет место тогда и только тогда, когда каждая из его частей равна 2. Отсюда нетрудно найти корень уравнения вида $x_1 = 0$.

75. $(2x+3y-6)^4 + 2x^4 + 3y^4 = 6.$

Решение. Введем новую переменную $z = 6-2x-3y$, тогда, принимая во внимание уравнение, получаем систему двух уравнений относительно переменных x, y, z следующего вида:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=6, \\ 2x^4+3y^4+z^4=6. \end{cases} \qquad (*)$$

Применим (дважды) к первому уравнению системы $(*)$ неравенство Коши—Буняковского (9), тогда

$$36 = (2x+3y+z)^2 = (\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x + \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}y + 1\cdot z)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (2+3+1)(2x^2+3y^2+z^2) = 6(2x^2+3y^2+z^2),$$
$$36 \leqslant (2x^2+3y^2+z^2)^2 = (\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}y^2 + 1\cdot z^2)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (2+3+1)(2x^4+3y^4+z^4) = (6+3y^4+z^4).$$

Таким образом, доказано неравенство $2x^4+3y^4+z^4 \geqslant 6$.

Отсюда и из второго уравнения системы $(*)$ следует, что примененные выше неравенства Коши—Буняковского (9) обращаются в равенства. В этой связи $\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}y}{\sqrt{3}} = \dfrac{z}{1}$, т. е. $x=y=z$.

В таком случае из первого уравнения системы $(*)$ получаем $6x=6$ или $x_1=1$. Следовательно, корнями заданного уравнения являются $x_1=1$, $y_1=1$ и $z_1=1$.

76. $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47.$

Решение. Обозначим $y = x+\dfrac{1}{x}$, тогда $x^2+\dfrac{1}{x^2} = y^2-2$ и заданное уравнение принимает вид $4(y^2-2)+12y=47$. Отсюда получаем уравнение $4y^2+12y-55=0$, корнями которого являются $y_1=\dfrac{5}{2}$ и $y_2=-\dfrac{11}{2}$. Далее, для нахождения корней заданного уравнения необходимо рассмотреть два уравнения относительно x.

1) Пусть $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$, тогда $2x^2-5x+2=0$ и $x_1=2$, $x_2=\dfrac{1}{2}$.
2) Пусть $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{11}{2}$. Тогда имеем уравнение $2x^2+11x+2=0$, корнями которого являются

$$x_3 = \frac{-11-\sqrt{105}}{4} \quad \text{и} \quad x_4 = \frac{-11+\sqrt{105}}{4}.$$

77. $x^3+x^2+x=-\dfrac{1}{3}.$

Решение. Приведем уравнение к равносильному виду

$$3x^3+3x^2+3x+1=0,$$
$$(x+1)^3=-2x^3, \quad x+1=-\sqrt[3]{2}x.$$

Отсюда получаем корень заданного уравнения $x_1 = -\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

78. $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0.$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения

$$x^4-2x^3+2x^2+4x-8 = x^4-2x^2-(2x^3-4xv)+4x^2-8 =$$
$$= x^2(x^2-2)-2x(x^2-2)+4(x^2-2) =$$
$$= (x^2-2)(x^2-2x+4).$$

Так как $x^2-2x+4>0$, то $x^2-2=0$ и $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$.

79. $8(x^4+y^4)-4(x^2+y^2)+1=0.$

Решение. Если обе части уравнения умножить на 2, то

$$16x^4+16y^4-8x^2-8y^2+2=0, \quad \text{или} \quad (4x^2-1)^2+(4y^2-1)^2=0.$$

Так как $(4x^2-1)^2 \geqslant 0$ и $(4y^2-1)^2 \geqslant 0$, то отсюда получаем $4x^2=1$ и $4y^2=1$. Следовательно, корнями уравнения являются $x_1=\dfrac{1}{2}$, $y_1=\dfrac{1}{2}$; $x_2=\dfrac{1}{2}$, $y_2=-\dfrac{1}{2}$; $x_3=-\dfrac{1}{2}$, $y_3=\dfrac{1}{2}$ и $x_4=-\dfrac{1}{2}$, $y_4=-\dfrac{1}{2}$.

80. $x^3+3x+5\sqrt{2}=0.$

Решение. Нетрудно видеть, что найти подбором хотя бы один корень кубического уравнения весьма затруднительно. В этой связи будем искать представление многочлена третьей степени $x^3+3x+5\sqrt{2}$ в виде произведения многочленов первой и второй степеней, т. е.

$$(x+a)(b_1x^2+b_2x+b_3)=x^3+3x+5\sqrt{2}. \qquad (*)$$

Раскрывая скобки в левой части выражения $(*)$ и после этого приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в обеих частях данного выражения, получим систему уравнений относительно неизвестных a, b_1, b_2, b_3, т. е.

$$\begin{cases} b_1=1, \\ b_2+ab_1=0, \\ ab_2+b_3=3, \\ ab_3=5\sqrt{2}. \end{cases}$$

Корнями системы уравнений являются $a=\sqrt{2}$, $b_1=1$, $b_2=-\sqrt{2}$ и $b_3=5$. В этой связи заданное уравнение можно переписать как

$$(x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x+5)=0.$$

Так как $x^2-\sqrt{2}x+5>0$, то уравнение имеет единственный корень $x_1=-\sqrt{2}$.

81. $(x-2)^6+(x-4)^6=64.$

Решение. Введем новую переменную $y=x-3$, тогда уравнение принимает вид $(y+1)^6+(y-1)^6=64$. Воспользуемся формулой бинома Ньютона (11) при $n=6$, тогда

$$(y+1)^6+(y-1)^6=y^6+6y^5+15y^4+20y^3+15y^2+6y+1+y^6-$$
$$-6y^5+15y^4-20y^3+15y^2-6y+1=2y^6+30y^4+30y^2+2.$$

Отсюда получаем уравнение $y^6+15y^4+15y^2-31=0$.

Положим $z=y^2$, тогда получим кубическое уравнение вида $z^3+15z^2+15z-31=0$ или $(z-1)(z^2+16z+31)=0$, где $z\geqslant 0$.

Так как уравнение $z^2+16z+31=0$ положительных корней не имеет, то уравнение $(z-1)(z^2+16z+31)=0$ имеет только один подходящий корень $z_1=1$.

Поскольку $y^2=z$, то $y_1=1$ и $y_2=-1$. Однако $x=y+3$, поэтому $x_1=4$ и $x_2=2$.

82. $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\dfrac{x-1}{2}.$

Решение. Обозначим $\dfrac{x-1}{2}=y$. Тогда $x=2y+1$ и заданное уравнение принимает вид

$$\left[\frac{4y+1}{3}\right]=y, \qquad (*)$$

где y — целое число.

Так как по определению

$$a=[a]+\{a\} \quad \text{и} \quad 0\leqslant\{a\}<1, \quad \text{то} \quad 0\leqslant a-[a]<1.$$

Тогда из уравнения $(*)$ следует, что $0\leqslant\dfrac{4y+1}{3}-y<1$ или $-1\leqslant y<2$.

Поскольку y — целое число и $-1\leqslant y<2$, то $y_1=-1$, $y_2=0$ и $y_3=1$. Так как $x=2y+1$, то $x_1=-1$, $x_2=1$ и $x_3=3$.

83. $3x+4[x]=5\{x\}+6.$

Решение. Так как по определению $x=[x]+x$, то заданное уравнение принимает вид $3\bigl([x]+\{x\}\bigr)+4[x]=5\{x\}+6$ или

$$x=\frac{7[x]-6}{2}. \qquad (*)$$

Поскольку $0\leqslant\{x\}<1$, то $0\leqslant\dfrac{7[x]-6}{2}<1$. Отсюда следует, что $0\leqslant 7[x]-6<2$ или $\dfrac{6}{7}\leqslant[x]<\dfrac{8}{7}$. По определению $[x]$ — целое число, поэтому из двойного неравенства $\dfrac{6}{7}\leqslant[x]<\dfrac{8}{7}$ получаем $[x]=1$.

Если $[x] = 1$ подставить в формулу $(*)$, то $x = \dfrac{1}{2}$. Известно, что $x = [x] + x$. Отсюда получаем $x_1 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, т. е. заданное уравнение имеет единственный корень $x_1 = \dfrac{3}{2}$.

84. $\{2\{2x\}\} = x$.

Решение. Из заданного уравнения следует, что $0 \leqslant x < 1$. Рассмотрим четыре случая.

1) Пусть $0 \leqslant x < \dfrac{1}{4}$. Тогда $0 \leqslant 2x < \dfrac{1}{2}$, $2x = 2x$, $22x = 4x = 4x$ и уравнение принимает вид $4x = x$. Отсюда получаем $x_1 = 0$.
2) Пусть $\dfrac{1}{4} \leqslant x < \dfrac{1}{2}$. В таком случае $\dfrac{1}{2} \leqslant 2x < 1$, $2x = 2x$ и $22x = 4x$. Так как $1 \leqslant 4x < 2$, то $4x = 4x - 1$ и уравнение можно переписать как $4x - 1 = x$, т. е. $x_2 = \dfrac{1}{3}$. Здесь следует отметить, что значение x_2 принадлежит рассматриваемому полуинтервалу.
3) Пусть $\dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{3}{4}$. Тогда $1 \leqslant 2x < \dfrac{3}{2}$, $2x = 2x - 1$ и $22x = 4x - 2$. Принимая во внимание тот факт, что $2 \leqslant 4x < 3$, получаем $0 \leqslant 4x - 2 < 1$, $4x - 2 = 4x - 2$ и из уравнения следует $4x - 2 = x$. Отсюда вытекает $x_3 = \dfrac{2}{3}$. Так как $\dfrac{1}{2} \leqslant x_3 < \dfrac{3}{4}$, то x_3 — корень заданного уравнения.
4) Пусть $\dfrac{3}{4} \leqslant x < 1$. Так как $\dfrac{3}{2} \leqslant 2x < 2$, то $2x = 2x - 1$ и $22x = 4x - 2$. Поскольку $3 \leqslant 4x < 4$ и $1 \leqslant 4x - 2 < 2$, то $4x - 2 = 4x - 3$ и уравнение принимает вид $4x - 3 = x$. Отсюда получаем $x = 1$. Однако ранее было отмечено, что $0 \leqslant x < 1$. Поэтому $x = 1$ не является корнем заданного уравнения.

Итак, заданное уравнение имеет три корня

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1/3 \quad \text{и} \quad x_3 = 2/3.$$

§ 2.7. Иррациональные уравнения

85. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x} = \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x > 1$. Пусть $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2x}$ и $g(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает на области допустимых значений, а функция $y = g(x)$ непрерывна и убывает, то заданное уравнение имеет не более одного корня. Непосредственно подбором убеждается в том, что таким корнем является $x_1 = 2$.

86. $\sqrt{(x+4)(2x+3)} - 3\sqrt{x+8} = 4 - \sqrt{(x+8)(2x+3)} + 3\sqrt{x+4}$.

Решение. Область допустимых значений переменной x в уравнении определяется неравенством $x \geqslant -\dfrac{3}{2}$.

Обозначим $\sqrt{x+4} = a$, $\sqrt{2x+3} = b$ и $\sqrt{x+8} = c$. Тогда уравнение принимает вид $ab - 3c = 4 - bc + 3a$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$. Полученное уравнение преобразуем следующим образом:

$$ab - 3a + bc - 3c = 4,$$
$$a \cdot (b-3) + c \cdot (b-3) = 4 \quad \text{или}$$
$$(b-3) \cdot (a+c) = 4. \qquad (*)$$

Так как $a + c \geqslant 0$, то из уравнения $(*)$ следует, что $b - 3 > 0$, т. е. $\sqrt{2x+3} > 3$ и $x > 3$.

Перепишем уравнение $(*)$ в равносильном виде

$$\left(\sqrt{2x+3-3}\right) \cdot \left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+8}\right) = 4. \qquad (**)$$

Пусть $f(x) = \left(\sqrt{2x+3} - 3\right) \cdot \left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+8}\right)$. Нетрудно видеть, что $y = f(x)$ является непрерывной и возрастающей при $x > 3$. В этой связи уравнение $(**)$ имеет не более одного корня. Этот корень $x_1 = 5$.

Если корень $x_1 = 5$ не удается найти подбором, то необходимо провести дальнейшее преобразование уравнения $(**)$ т. е.

$$\frac{4}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+8}} = \sqrt{2x+3} - 3,$$
$$\frac{4 \cdot \left(\sqrt{x+8} - \sqrt{x+4}\right)}{x + 8 - x - 4} = \sqrt{2x+3} - 3,$$
$$\sqrt{x+8} - \sqrt{x+4} = \sqrt{2x+3} - 3.$$

Далее, возведем в квадрат обе части последнего уравнения, тогда получаем уравнение $\sqrt{(x+8)(x+4)} = 3\cdot\sqrt{2x+3}$. Возведем в квадрат еще раз обе части уравнения, тогда $x^2-6x+5=0$. Так как $x>3$, то $x_1=5$.

87. $x^2-4x-2 = 2\sqrt{x^3+1}$.

Решение. Для определения области допустимых значений переменной x рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} x^3+1\geqslant 0,\\ x^2-4x-2\geqslant 0,\end{cases}$$

из которой следует, что областью допустимых значений x является объединение множеств $-1\leqslant x\leqslant 2-\sqrt{6}$ и $x\geqslant 2+\sqrt{6}$.

Так как

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1) \quad \text{и}$$
$$x^2-4x-2=\big(x^2-x+1\big)-3(x+1),$$

то исходное уравнение равносильно уравнению

$$3(x+1)+2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x^2-x+1}-\big(x^2-x+1\big)=0. \qquad (*)$$

Отметим, что уравнения равносильны по той причине, что для любых $x\geqslant -1$ справедливо неравенство $x+1\geqslant 0$, а неравенство $x^2-x+1>0$ выполняется на всей числовой оси OX.

Далее, обе части уравнения $(*)$ разделим на многочлен x^2-x+1 и при этом обозначим $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=y$. В таком случае получим квадратное уравнение $3y^2+2y-1=0$ и его единственный неотрицательный корень равен $y_1=\dfrac{1}{3}$.

Рассмотрим уравнение $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{3}$. Отсюда вытекает квадратное уравнение $x^2-10x-8=0$, которое имеет два корня $x_1=5+\sqrt{33}$ и $x_2=5-\sqrt{33}$. Так как оба значения x_1 и x_2 принадлежат области допустимых значений переменной x, то они являются также корнями исходного уравнения.

88. $\sqrt[4]{2x-1}=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{4}$.

Решение. Используя неравенство Коши (1) при $n=4$, получаем

$$\sqrt[4]{2x-1}=\sqrt[4]{1\cdot1\cdot1\cdot(2x-1)}\leqslant\frac{1+1+1+2x-1}{4}=\frac{x+1}{2}.$$

Так как по условию $\sqrt[4]{2x-1}=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{4}$, то имеет место цепочка неравенств $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{4}\leqslant\dfrac{x+1}{2}$, $x^2+3\leqslant 2x+2$ или $(x-1)^2\leqslant 0$.

Поскольку $(x-1)^2\geqslant 0$, то $(x-1)^2=0$ или $x_1=1$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся в том, что $x_1=1$ является его корнем.

89. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

Решение. Приведем два способа решения уравнения.

Способ 1. Если обе части уравнения возвести в куб, используя при этом формулу $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, то

$$5x+7-5x+12-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}=1.$$

Отсюда получаем равносильные уравнения

$$\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}=6,$$
$$5x^2-25x-300=0 \quad \text{или}$$
$$x^2-x-12=0.$$

Корнями последнего уравнения являются $x_1=-3$ и $x_2=4$.

Проверка показывает, что эти два числа являются корнями исходного уравнения.

Способ 2. Обозначим $u=\sqrt[3]{5x+7}$ и $v=\sqrt[3]{5x-12}$. Тогда получаем систему уравнений относительно переменных u и v вида

$$\begin{cases} u-v=1,\\ u^3-v^3=19\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u-v=1,\\ u^2+uv+v^2=19.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $v=u-1$, из второго уравнения следует $u^2+u(u-1)+(u-1)^2=19$ или $u^2-u-6=0$. Корнями уравнения $u^2-u-6=0$ являются $u_1=-2$ и $u_2=3$.

Так как $\sqrt[3]{5x+7}=u$, то $\sqrt[3]{5x+7}=-2$ или $\sqrt[3]{5x+7}=3$. Отсюда следует, что $x_1=-3$ и $x_2=4$.

90. $\dfrac{30}{x\sqrt[3]{35-x^3}}=x+\sqrt[3]{35-x^3}$.

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{35-x^3}=y$. Тогда из уравнения получаем систему двух уравнений относительно переменных x и y вида

$$\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ \dfrac{30}{xy}=x+y. \end{cases} \qquad (*)$$

Введем новые переменные $x+y=u$ и $xy=v$, тогда система уравнений $(*)$ будет равносильна системе

$$\begin{cases} u^3-3uv=35, \\ uv=30. \end{cases}$$

Корнями данной системы уравнений являются $u_1=5$ и $v_1=6$.

Следовательно, для нахождения значений переменных x, y имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Отсюда получаем корни заданного уравнения $x_1=2$ и $x_2=3$.

91. $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$.

Решение. Пусть $y=\sqrt{x+1}$, тогда $y\geqslant 0$ и $x=y^2-1$. В таком случае уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} &x(x+1)+12\sqrt{x+1}=36, \\ &(y^2-1)y^2+12y=36, \\ &y^4-y^2+12y-36=0, \\ &y^4-(y-6)^2=0, \\ &(y^2-y+6)(y^2+y-6)=0. \end{aligned}$$

Уравнение $y^2-y+6=0$ корней не имеет (дискриминант отрицательный), а уравнение $y^2+y-6=0$ имеет единственный

положительный корень $y_1=2$. Следовательно, имеем $\sqrt{x+1}=2$ или $x_1=3$.

92. $x^2-5x-4\sqrt{x}+13=0$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения с целью выделения полных квадратов $(x^2-6x+9)+(x-4\sqrt{x}+4)=0$ или $(x-3)^2+(\sqrt{x}-2)^2=0$.

Очевидно, что левая часть уравнения принимает нулевое значение лишь в том случае, когда оба слагаемых одновременно обращаются в ноль, а это невозможно. Следовательно, заданное уравнение корней не имеет.

93. $\sqrt{2x^2-4x+3}+\sqrt{3x^2-6x+7}=2x+2-x^2$.

Решение. Первоначально оценим снизу левую часть уравнения. Так как

$$2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1\geqslant 1$$

и

$$3x^2-6x+7=3(x-1)^2+4\geqslant 4,$$

то

$$\sqrt{2x^2-4x+3}\geqslant 1 \quad \text{и} \quad \sqrt{3x^2-6x+7}\geqslant 2.$$

Отсюда следует

$$\sqrt{2x^2-4x+3}+\sqrt{3x^2-6x+7}\geqslant 3.$$

Затем получим верхнюю оценку правой части уравнения. Нетрудно видеть, что $2x+2-x^2=3-(x-1)^2\leqslant 3$.

Следовательно, равенство в уравнении может достигаться только в том случае, когда обе его части одновременно равны 3, а это возможно только при условии, что $x_1=1$.

94. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

Решение. Для определения области допустимых значений переменной x в уравнении рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x-\sqrt{1-x}\geqslant 0, \\ 1-x\geqslant 0, \end{cases}$$

откуда получаем $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant x \leqslant 1$.

Введем новые переменные u, v, w следующим образом:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = u, \\ \sqrt{1-x} = v, \\ \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = w. \end{cases} \qquad (*)$$

С учетом системы уравнений $(*)$ и исходного уравнения можно составить систему уравнений относительно переменных u, v, w вида

$$\begin{cases} u + w = 1, \\ u^2 + v^2 = 1, \\ u^2 - v = w^2, \end{cases}$$

где $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ и $w \geqslant 0$. Неотрицательными корнями данной системы уравнений являются $u_1 = \dfrac{4}{5}$, $v_1 = \dfrac{3}{5}$ и $w_1 = \dfrac{1}{5}$.

Поскольку $u = \sqrt{x}$, то $\sqrt{x} = \dfrac{4}{5}$ или $x_1 = \dfrac{16}{25}$.

95. $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2.$

Решение. Применим к каждому слагаемому левой части уравнения неравенство Коши (2), тогда

$$\sqrt{x^2+x-1} = \sqrt{1\cdot(x^2+x-1)} \leqslant \frac{1+x^2+x-1}{2} = \frac{x^2+x}{2},$$
$$\sqrt{x-x^2+1} = \sqrt{1\cdot(x-x^2+1)} \leqslant \frac{1+x-x^2+1}{2} = \frac{x-x^2+2}{2}.$$

В таком случае

$$\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} \leqslant \frac{x^2+x}{2} + \frac{x-x^2+2}{2} = x+1$$

и из заданного уравнения получаем неравенство $x^2 - x + 2 \leqslant x + 1$. Отсюда вытекает неравенство $(x-1)^2 \leqslant 0$ или $x = 1$.

Следовательно, корнем уравнения может быть только $x_1 = 1$. Непосредственной подстановкой $x_1 = 1$ в исходное уравнение убеждаемся, что это действительно так.

Примечание. Данное уравнение можно решить несколько иным образом. Возведем в квадрат левую часть уравнения и применим неравенство Коши—Буняковского (9). Тогда

$$\left(\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1}\right)^2 \leqslant (1^2+1^2)(x^2+x-1+x-x^2+1) = 4x$$

или

$$\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} \leqslant 2\sqrt{x}.$$

Далее, с учетом заданного уравнения можно составить неравенство $x^2 - x + 2 \leqslant 2\sqrt{x}$. Отсюда получаем $x^2 - 2x + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 \leqslant 0$ или $(x-1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2 \leqslant 0$. Так как для любых неотрицательных x имеет место неравенство $(x-1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2 \geqslant 0$, то $(x-1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2 = 0$ или $x_1 = 1$.

96. $\sqrt[3]{25x\cdot(2x^2+9)} = 4x + \dfrac{3}{x}.$

Решение. Из уравнения следует, что $x \neq 0$. Обе части уравнения умножим на x и получим уравнение

$$\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} = 4x^2 + 3. \qquad (*)$$

Используя неравенство Коши (1) при $n = 3$, оценим сверху левую часть уравнения $(*)$ следующим образом:

$$\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} = \sqrt[3]{5x^2\cdot 5x^2\cdot(2x^2+9)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{5x^2+5x^2+2x^2+9}{3} = 4x^2+3.$$

Из заданного уравнения следует, что примененное выше неравенство Коши обращается в равенство. А это означает, что $5x^2 = 2x^2 + 9$ или $x^2 = 3$. Отсюда получаем корни заданного уравнения $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$.

97. $2\sqrt{1 + x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}} = x.$

Решение. Из условия задачи следует, что $x > 0$. Преобразуем левую часть уравнения следующим образом:

$$2\sqrt{1 + x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}} =$$

$$= 2\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{(x+4)^2}}}} =$$

$$= 2\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)(x+4)}}} =$$

$$= 2\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{(x+3)^2}}} =$$

$$= 2\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)(x+3)}} =$$

$$= 2\sqrt{1 + x\sqrt{(x+2)^2}} =$$

$$= 2\sqrt{1 + x(x+2)} = 2\sqrt{(x+1)^2} = 2(x+1) = 2x + 2.$$

Отсюда и из уравнения получаем $2x + 2 = x$ или $x = -2$. Так как $x > 0$, то заданное уравнение корней не имеет.

98. $2\left(\sqrt{x+15} - \sqrt{x}\right) = 3\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}\right)$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x \geqslant 1$.

Перепишем уравнение в равносильном виде

$$2\sqrt{x+15} + 3\sqrt{x-1} = 3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x},$$

а затем обе его части возведем в квадрат. Тогда получим уравнение

$$2 + \sqrt{x^2 + 14x - 15} = \sqrt{x^2 + 3x}. \qquad (*)$$

Если возвести в квадрат обе части уравнения $(*)$, то

$$4\sqrt{x^2 + 14x - 15} = 11 - 11x. \qquad (**)$$

Так как левая часть уравнения $(**)$ принимает только неотрицательные значения, то $11 - 11x \geqslant 0$ или $x \leqslant 1$. Поскольку ранее было установлено, что $x \geqslant 1$, то $x = 1$. Подставим значение $x = 1$ в заданное уравнение и убедимся, что $x_1 = 1$ является его единственным корнем.

99. $x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

Принимая во внимание неравенство Коши—Буняковского (9), получаем

$$(x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x})^2 \leqslant (x^2+1)(x+1+3-x) = 4(x^2+1).$$

Отсюда следует неравенство $x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \leqslant 2\sqrt{x^2+1}$. Сравнивая полученное неравенство с заданным уравнением, делаем вывод о том, что примененное выше неравенство Коши—Буняковского превращается в равенство. В этой связи имеет место уравнение $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$.

Так как правая часть данного уравнения является положительной, то $x > 0$. Путем возведения в квадрат обеих частей уравнения получаем кубическое уравнение $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$, которое равносильно уравнению $(x-1)(x^2-2x-1) = 0$. Последнее уравнение имеет два положительных корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

100. $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 4$.

Решение. Первоначально определим область допустимых значений переменной x в уравнении. Очевидно, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Далее, установим максимальные значения каждого из слагаемых левой части уравнения, т. е. $\sqrt[4]{1-x} \leqslant \sqrt[4]{2}$ и $\sqrt[4]{1+x} \leqslant \sqrt[4]{2}$.

Отсюда следует, что на области допустимых значений x левая часть уравнения не превосходит значения $2\sqrt[4]{2}$, которое, в свою очередь, строго меньше 4. Следовательно, заданное уравнение корней не имеет.

Примечание. Убедиться в отсутствии корней заданного уравнения можно с помощью неравенства Бернулли (8) или неравенства (10) при $n = 4$. Справедливы следующие верхние оценки левой части уравнения:

$$\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = (1-x)^{\frac{1}{4}} + (1+x)^{\frac{1}{4}} \leqslant 1 - \frac{x}{4} + 1 + \frac{x}{4} = 2,$$

$$\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \leqslant \sqrt[4]{8(1-x+1+x)} = 2.$$

101. $\sqrt[4]{13x+1} + \sqrt[4]{4x-1} = 3\sqrt[4]{x}$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x \geqslant \dfrac{1}{4}$.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt[4]{x}$, тогда уравнение принимает вид $\sqrt[4]{13+\dfrac{1}{x}}+\sqrt[4]{4-\dfrac{1}{x}}=3$. Введем новые переменные $u=\sqrt[4]{13+\dfrac{1}{x}}$ и $v=\sqrt[4]{4-\dfrac{1}{x}}$, тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u+v=3, \\ u^4+v^4=17, \end{cases} \qquad (*)$$

где $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$.

Так как $u^4+v^4=\left((u+v)^2-2uv\right)^2-2u^2v^2$, то из системы уравнений $(*)$ следует уравнение $(9-2uv)^2-2u^2v^2=17$, которое равносильно уравнению $u^2v^2-18uv+32=0$. Из данного уравнения получаем $uv=2$ или $uv=16$.

Рассмотрим две системы уравнений

$$\begin{cases} u+v=3, \\ uv=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u+v=3, \\ uv=16. \end{cases}$$

Неотрицательными корнями первой системы являются $u_1=1$, $v_1=2$ и $u_2=2$, $v_2=1$, а вторая система является несовместной.

Отсюда получаем два уравнения относительно переменной x вида $\sqrt[4]{13+\dfrac{1}{x}}=1$ и $\sqrt[4]{13+\dfrac{1}{x}}=2$. Первое уравнение имеет корень $x_1=-\dfrac{1}{12}$, а второе $x_2=\dfrac{1}{3}$. Так как $x \geqslant \dfrac{1}{4}$, то заданное уравнение имеет единственный корень $x_2=\dfrac{1}{3}$.

102. $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $2 \leqslant x \leqslant 4$.

Оценим сверху левую часть уравнения, используя для этого неравенство (10) при $n=4$, т. е.

$$a+b \leqslant \sqrt[4]{8(a^4+b^4)}. \qquad (*)$$

С помощью неравенства $(*)$ получаем

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x} \leqslant \sqrt[4]{8(x-2+4-x)}=2.$$

Отсюда и из уравнения делаем вывод о том, что примененное выше неравенство $(*)$ обратилось в равенство, что возможно тогда и только тогда, когда $a=b$. Следовательно, имеем

$$\sqrt[4]{x-2}=\sqrt[4]{4-x} \quad \text{и} \quad x_1=3.$$

Проверкой убеждается, что $x_1=3$ — корень заданного уравнения.

Примечание. Заданное уравнение можно решить на основе двукратного применения неравенства Коши—Буняковского (9). Для левой части уравнения имеет место

$$\left(\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}\right)^4 \leqslant \left((1^2+1^2)\cdot\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)\right)^2 =$$
$$=4\cdot\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)^2 \leqslant 4\cdot(1^2+1^2)\cdot(x-2+4-x)=16.$$

Отсюда следует неравенство $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x} \leqslant 2$. Принимая во внимание заданное уравнение, делаем вывод о том, что примененные выше неравенства Коши—Буняковского превращаются в равенства. А этот факт означает, что $\sqrt[4]{x-2}=\sqrt[4]{4-x}$, т. е. $x_1=3$.

103. $\sqrt{3x^2-5x+7}+\sqrt{3x^2-7x+2}=3$.

Решение. Умножим и разделим левую часть уравнения на

$$\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+2},$$

предполагая при этом, что

$$\sqrt{3x^2-5x+7} \neq \sqrt{3x^2-7x+2}, \quad \text{т. е.} \quad x \neq -\frac{5}{2}.$$

Тогда

$$\frac{3x^2-5x+7-3x^2+7x-2}{\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+2}}=3,$$
$$\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+2}=\frac{2x+5}{3}. \qquad (*)$$

Если уравнение $(*)$ сложить с заданным уравнением, то $\sqrt{3x^2-5x+7}=\dfrac{x+7}{3}$. Отсюда следует, что $x+7 \geqslant 0$ или $x \geqslant -7$.

Возведем в квадрат обе части последнего уравнения и получим уравнение $26x^2-59x+14=0$, корнями которого являются $x_1=2$ и $x_2=\dfrac{7}{26}$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что найденные значения x являются корнями заданного уравнения.

Кроме того, убедимся еще в том, что $x = -\dfrac{5}{2}$ не удовлетворяет заданному уравнению.

104. $\sqrt{17 - x^2} = \left(3 - \sqrt{x}\right)^2$.

Решение. Введем новые переменные $u = \sqrt{x}$ и $v = 3 - \sqrt{x}$, тогда $u + v = 3$ и уравнение принимает вид $\sqrt{17 - u^4} = v^2$, т. е. $u^4 + v^4 = 17$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^4 + v^4 = 17, \end{cases} \tag{$*$}$$

где $u \geqslant 0$ и $v \leqslant 3$.

Представим левую часть второго уравнения системы $(*)$ в виде

$$u^4 + v^4 = \left((u+v)^2 - 2uv\right)^2 - 2u^2v^2.$$

Отсюда, принимая во внимание уравнения системы $(*)$, получаем квадратное уравнение $(uv)^2 - 18uv + 32 = 0$, корнями которого являются $uv = 2$ и $uv = 16$.

Далее, рассмотрим совокупность двух систем уравнений

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 16. \end{cases}$$

Первая система уравнений имеет две пары корней $u_1 = 1$, $v_1 = 2$ и $u_2 = 2$, $v_2 = 1$, а вторая система является несовместной.

Поскольку $x = u^2$, то $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Проверка показывает, что найденные значения x удовлетворяют заданному уравнению.

105. $x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3$.

Решение. Очевидно, что $0 < x \leqslant 3$. Обозначим $3 + \sqrt{x} = y$, тогда $y \geqslant 3$ и имеет место система уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{y} = 3, \\ y = 3 + \sqrt{x}. \end{cases} \tag{$*$}$$

Вычтем из первого уравнения системы $(*)$ второе уравнение, тогда получим уравнения

$$x + \sqrt{y} - y = -\sqrt{x} \quad \text{или} \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + 1) = 0.$$

Поскольку $x > 0$ и $y > 0$, то $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$ и $\sqrt{x} - \sqrt{y} + 1 = 0$, т. е. $\sqrt{y} = \sqrt{x} + 1$. Принимая во внимание первое уравнение системы $(*)$, получаем уравнение $x + \sqrt{x} - 2 = 0$, откуда следует $\sqrt{x} = 1$ или $x_1 = 1$.

Примечание. Данное уравнение можно решить проще, используя для этого монотонность функции $f(x) = x + \sqrt{3 + \sqrt{x}}$. Поскольку функция $y = f(x)$ является непрерывной и возрастающей при $x \geqslant 0$, то уравнение $f(x) = 3$ не может иметь более одного корня. Этот единственный корень $x_1 = 1$ легко найти подбором.

106. $\sqrt{17 - 2\sqrt{45 - 2x}} = x - 14$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $-13\dfrac{5}{8} \leqslant x \leqslant 22\dfrac{1}{2}$, а с учетом правой части заданного уравнения $x - 14 \geqslant 0$ получаем $14 \leqslant x \leqslant 22\dfrac{1}{2}$.

Введем новую переменную $y = \sqrt{45 - 2x}$, тогда $x = \dfrac{45 - y^2}{2}$ и уравнение можно переписать как

$$2\sqrt{17 - 2y} = 17 - y^2, \tag{$*$}$$

где $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{17}$.

Пусть $z = \sqrt{17 - 2y}$, тогда отсюда и из уравнения $(*)$ вытекает система уравнений

$$\begin{cases} z^2 = 17 - 2y, \\ 2z = 17 - y^2. \end{cases} \tag{$**$}$$

Вычтем из первого уравнения системы $(**)$ второе уравнение, тогда $z^2 - 2z = -2y + y^2$, $y^2 - z^2 - 2(y - z) = 0$ или $(y - z)(y + z - 2) = 0$.

Отсюда следует, что $z = y$ или $z = 2 - y$. В этой связи из первого уравнения системы $(**)$ получаем совокупность двух уравнений относительно переменной y вида $y^2 + 2y - 17 = 0$

и $y^2-2y-13=0$. Корнями совокупности уравнений являются $y_1=-1+3\sqrt{2}$, $y_2=-1-3\sqrt{2}$, $y_3=1+\sqrt{14}$ и $y_4=1-\sqrt{14}$.

Однако известно, что $0\leqslant y\leqslant\sqrt{17}$. Поэтому уравнение $(*)$ имеет единственный корень $y_1=3\sqrt{2}-1$. Так как $x=\dfrac{45-y^2}{2}$, то

$$x_1=\frac{45-(3\sqrt{2}-1)^2}{2}=\frac{45-18+6\sqrt{2}-1}{2}=13+3\sqrt{2}.$$

Таким образом, корнем заданного уравнения является $x_1=13+3\sqrt{2}$

107. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}=4.$

Решение. Поскольку область допустимых значений переменной x в уравнении определяется, как $-1\leqslant x\leqslant 1$, и при этом значения $x=-1$ и $x=1$ не являются его корнями, то можно полагать, что $-1<x<1$. В этой связи для оценки левой части уравнения можно воспользоваться неравенством Бернулли (8), т. е.

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}=$$
$$=(1-x)^{1/2}+(1+x)^{1/2}+(1-x^2)^{\frac14}+(1+x^2)^{\frac14}\leqslant$$
$$\leqslant 1-\frac{x}{2}+1+\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{4}+1+\frac{x^2}{4}=4.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}\leqslant 4.$$

Если полученное неравенство сравнить с заданным уравнением, то видно, что неравенство Бернулли обратилось в равенство, а это возможно лишь при $x_1=0$. Подстановкой в уравнение убеждаемся, что $x_1=0$ — его корень.

108. $\sqrt{1-\dfrac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}=\left(1-\dfrac{x}{24}\right)^4+\left(1+\dfrac{x}{36}\right)^6.$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $-1\leqslant x\leqslant 3$. Поскольку $x=-1$ и $x=3$ не являются корнями уравнения, то полагаем, что $-1<x<3$. Применим

к левой части уравнения неравенство Бернулли (8), а к правой части — неравенство Бернулли (7), тогда

$$\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}=\left(1-\frac{x}{3}\right)^{1/2}+(1+x)^{1/6}\leqslant 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2$$

и

$$\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6\geqslant 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2.$$

Отсюда следует, что равенство в уравнении возможно только в том случае, когда обе его части одновременно равны 2. А это означает, что неравенства Бернулли, примененные к обеим частям уравнения, обращаются в равенства. Следовательно, имеет место $x_1=0$.

109. $\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}=2.$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $-1\leqslant x\leqslant 1$. Подстановкой в уравнение убеждаемся, что $x=0$ не является его корнем, поэтому можно считать, что $\sqrt{1-x^2}<1$. В этой связи к каждому слагаемому левой части уравнения можно применить неравенство Бернулли (8), тогда

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^{1/5}+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^{1/5}\leqslant$$
$$\leqslant 1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{5}+1-\frac{\sqrt{1-x^2}}{5}=2.$$

Если полученное неравенство

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}\leqslant 2$$

сравнить с уравнением, то видно, что неравенство Бернулли (8) обращается в равенство, а это означает, что

$$\sqrt{1-x^2}=0\quad\text{и}\quad x_1=-1,\quad x_2=1.$$

110. $4\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}+\dfrac{36}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{4}{\sqrt{y-1}}=28.$

Решение. Обозначим $\sqrt{x-2} = a^2$ и $\sqrt{y-1} = b^2$, тогда уравнение принимает вид $4a^2 + b^2 + \dfrac{36}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 28$. Далее, выделим полные квадраты

$$\left(2a - \frac{6}{a}\right)^2 + \left(b - \frac{2}{b}\right)^2$$

Отсюда следует, что $2a - \dfrac{6}{a} = 0$, $b - \dfrac{2}{b} = 0$ и $a^2 = 3$, $b^2 = 2$. Таким образом, имеем $\sqrt{x-2} = 3$ и $\sqrt{y-1} = 2$, откуда получаем $x_1 = 11$ и $y_1 = 5$.

111. $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$.

Решение. Очевидно, что $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$. Воспользуемся неравенством Коши (2), тогда $\sqrt{y-1} = \sqrt{(y-1)\cdot 1} \leqslant \dfrac{y-1+1}{2} = \dfrac{y}{2}$.

Следовательно, $x\sqrt{y-1} \leqslant \dfrac{xy}{2}$. Проведя аналогичные рассуждения, получаем $y\sqrt{x-1} = y\sqrt{(x-1)\cdot 1} \leqslant \dfrac{xy}{2}$. Таким образом, имеет место неравенство $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leqslant xy$.

Отсюда и из заданного уравнения следует, что примененное выше (дважды) неравенство Коши (2) превратилось в равенство. А это означает, что $x - 1 = 1$ и $y - 1 = 1$, т. е. $x_1 = y_1 = 2$.

112. $\sqrt{2x^2 + 2y^2} = x + y - 1$.

Решение. Применяя неравенство (10) при $n = 2$, получаем

$$x + y \leqslant \sqrt{2x^2 + 2y^2}.$$

Если из левой части неравенства вычесть 1, то получим строгое неравенство $x + y - 1 < \sqrt{2x^2 + 2y^2}$, а это неравенство означает, что заданное уравнение корней не имеет.

113. $\sqrt{x^3 + x^2 + 4x + 4} = x\sqrt{x} + 2$.

Решение. Из уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Применим неравенство Коши—Буняковского (9) к правой части уравнения, тогда

$$(x\sqrt{x} + 2)^2 = (x\sqrt{x} + 2\cdot 1)^2 \leqslant (x^2 + 4)(x + 1) = x^3 + x^2 + 4x + 4.$$

Следовательно, получили неравенство

$$x\sqrt{x} + 2 \leqslant \sqrt{x^3 + x^2 + 4x + 4}.$$

Если полученное неравенство сравнить с заданным уравнением, то видно, что примененное выше неравенство Коши—Буняковского (9) обратилось в равенство, а это означает, что существует константа a ($a \neq 0$) такая, что $x = a\cdot\sqrt{x}$ и $2 = a\cdot 1$. Отсюда получаем $x = 2\sqrt{x}$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

114. $\dfrac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} + \dfrac{1}{4\left(3 - \sqrt{9 - x^2}\right)} = 1$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются полуоткрытые интервалы $-3 \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant 3$. Для упрощения последующих рассуждений введем новую переменную $y = \sqrt{9 - x^2}$.

В таком случае $x^2 = 9 - y^2$ и заданное уравнение принимает вид

$$\frac{9 - y^2}{3 + y} + \frac{1}{4(3 - y)} = 1. \qquad (*)$$

Затем воспользуемся неравенством Коши (2), с помощью которого оценим снизу левую часть уравнения $(*)$. Имеет место

$$\frac{9 - y^2}{3 + y} + \frac{1}{4(3 - y)} \geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{9 - y^2}{3 + y}\cdot\frac{1}{4(3 - y)}} = 1.$$

Известно, что неравенство Коши (2) превращается в равенство лишь в том случае, когда слагаемые левой части равны между собой.

В этой связи имеет место уравнение

$$\frac{9 - y^2}{3 + y} = \frac{1}{4(3 - y)}. \qquad (**)$$

Так как $y \geqslant 0$, то $3 + y > 0$ и уравнение $(**)$ можно переписать в виде $3 - y = \dfrac{1}{4(3 - y)}$ и $4(3 - y)^2 = 1$. Отсюда получаем $y_1 = \dfrac{5}{2}$ и $y_2 = \dfrac{7}{2}$.

Поскольку $x^2 = 9 - y^2$, то $x^2 = \frac{11}{4}$ и $x^2 = -\frac{13}{4}$. Так как $x^2 \geqslant 0$, то $x_1 = \frac{\sqrt{11}}{2}$ и $x_2 = -\frac{\sqrt{11}}{2}$.

115. $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}} = \dfrac{3}{x}$.

Решение. Область допустимых значений переменной x в уравнении определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x \geqslant 0, \\ x^2 - x \geqslant 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

из которой следует, что искомой областью является объединение множеств $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$.

Далее избавимся от иррациональности в знаменателях обеих дробей левой части уравнения, т. е.

$$\frac{4(x-\sqrt{x^2+x})}{x^2-(x^2+x)} - \frac{x+\sqrt{x^2-x}}{x^2-(x^2-x)} = \frac{3}{x}.$$

Отсюда получаем $4\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = 5x+3$. Далее, возведем в квадрат обе части последнего уравнения, тогда

$$16x^2 + 16x - 8\sqrt{x^4-x^2} + x^2 - x = 25x^2 + 30x + 9,$$

$$8\sqrt{x^4-x^2} + 8x^2 + 15x + 9 = 0. \qquad (*)$$

Так как $8\sqrt{x^4-x^2} \geqslant 0$ и $8x^2 + 15x + 9 > 0$ (это действительно так, поскольку дискриминант уравнения $8x^2+15x+9=0$ отрицательный), то уравнение $(*)$ корней не имеет.

116. $\sqrt{13-5x} + 2 = x - \sqrt{5-3x}$.

Решение. Для нахождения области допустимых значений переменной x в уравнении рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} 13 - 5x \geqslant 0, \\ 5 - 3x \geqslant 0, \end{cases}$$

из которой получаем $x \leqslant \frac{5}{3}$.

Заданное уравнение перепишем в равносильном виде

$$\sqrt{13-5x} + \sqrt{5-3x} = x - 2. \qquad (*)$$

Левая часть уравнения $(*)$ неотрицательна, поэтому $x-2 \geqslant 0$ или $x \geqslant 2$. Однако ранее было установлено, что $x \leqslant \frac{5}{3}$. В этой связи уравнение $(*)$ корней не имеет.

117. $\sqrt{10+3\sqrt{x^2-1}} + x^4\sqrt{5-x} = 3$.

Решение. Так как $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, то $\sqrt{10+3\sqrt{x^2-1}} \geqslant \sqrt{10} > 3$. Если при этом еще учесть, что $x^4 \cdot \sqrt{5-x} \geqslant 0$, то левая часть уравнения строго больше 3, а это означает, что заданное уравнение корней не имеет.

118. $\sqrt{2-x} + x - 3 = \sqrt{x-1}$.

Решение. Нетрудно видеть, что областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $1 \leqslant x \leqslant 2$. Оценим сверху значение левой части уравнения на области допустимых значений x.

Имеет место

$$\sqrt{2-x} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad x - 3 \leqslant -1, \quad \text{тогда} \quad \sqrt{2-x} + x - 3 \leqslant 0,$$

т. е. левая часть уравнения не превосходит 0. С другой стороны, правая часть уравнения $\sqrt{x-1} \geqslant 0$. В этой связи равенство в заданном уравнении достигается лишь в том случае, когда обе его части равны 0.

Из уравнения $\sqrt{x-1} = 0$ получаем $x_1 = 1$, однако подстановкой в заданное уравнение убеждаемся в том, что значение x_1 не является его корнем. Следовательно, заданное уравнение корней не имеет.

119. $x^2 + 2x + 3 = \sqrt{4-x^2}$.

Решение. Так как $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geqslant 2$ и $\sqrt{4-x^2} \leqslant 2$, то из заданного уравнения получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3 = 2, \\ \sqrt{4-x^2} = 2. \end{cases}$$

Корнем первого уравнения является $x = -1$, а из второго уравнения следует $x = 0$.

Следовательно, данная система уравнений является несовместной, а искомое уравнение корней не имеет.

120. $x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1}$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Применим к правой части уравнения неравенство Коши (1) при $n = 4$, тогда

$$2\sqrt[4]{2x-1} = 2\sqrt[4]{1\cdot 1\cdot 1\cdot (2x-1)} \leqslant 2\cdot \frac{1+1+1+2x-1}{4} = x+1.$$

В таком случае имеет место неравенство $x^2 - x + 2 \leqslant x + 1$ или $(x-1)^2 \leqslant 0$. Поскольку для произвольных действительных x выполняется неравенство $(x-1)^2 \geqslant 0$, то $(x-1)^2 = 0$ или $x_1 = 1$.

Подстановкой $x_1 = 1$ в заданное уравнение убеждаемся в том, что найденное значение x_1 является его корнем.

121. $\sqrt[4]{8x^2-2} + 2\sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3}$.

Решение. Так как $\sqrt[4]{8x^2-2} \geqslant 0$ и

$$2\sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{4x^2-4x+4} = \sqrt{(2x-1)^2+3} \geqslant \sqrt{3},$$

то левая часть уравнения больше или равна $\sqrt{3}$. Поскольку его правая часть равна $\sqrt{3}$, то отсюда вытекает система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[4]{8x^2-2} = 0, \\ \sqrt{(2x-1)^2+3} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Система уравнений является совместной и имеет единственный корень $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

122. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Решение. Оценим сверху левую часть уравнения посредством неравенства (10) при $n = 2$, т. е. $a + b \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2)}$. Имеет место

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leqslant \sqrt{2\bigl(x-2+4-x\bigr)} = 2.$$

Для правой части уравнения получим нижнюю оценку

$$x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Следовательно, равенство в заданном уравнении имеет место лишь в том случае, когда обе его части равны 2. А это возможно только при $x_1 = 3$.

Подставим значение x_1 в заданное уравнение и убедимся в том, что $x_1 = 3$ является его корнем.

Примечание. Верхнюю оценку левой части можно получить, используя неравенство Коши—Буняковского (9). Имеет место

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})^2 \leqslant (1^2+1^2)(x-2+4-x) = 4, \quad \text{или}$$
$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leqslant 2.$$

123. $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} = x^2 - 6x + 7$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $1 \leqslant x \leqslant 5$.

Для произвольных неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство $a + b \geqslant \sqrt{a^2+b^2}$, которое легко доказывается методом от противного. Если данное неравенство применить к левой части уравнения, то

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} \geqslant 2. \qquad (*)$$

Если из обеих частей заданного уравнения вычесть 2, то

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} - 2 = x^2 - 6x + 5 \quad \text{или}$$
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} - 2 = (x-1)(x-5). \qquad (**)$$

Используя неравенство $(*)$, делаем вывод о том, что левая часть уравнения $(**)$ неотрицательна. В тоже время правая его часть на области допустимых значений $1 \leqslant x \leqslant 5$ меньше или равна нулю. Следовательно, равенство в уравнении $(**)$ может быть достигнуто только в том случае, когда обе его части равны 0. Из уравнения $(x-1)(x-5) = 0$ получаем $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся в том, что $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$ являются его корнями.

124. $\sqrt[3]{x^3+6x^2-6x-1}=\sqrt{x^2+4x+1}$.

Решение. Предварительно представим уравнение в равносильном виде

$$\sqrt[3]{(x+2)^3-9(2x+1)}=\sqrt{(x+2)^2-3}. \qquad (*)$$

Затем обе части уравнения $(*)$ возведем в 6-ю степень, тогда

$$((x+2)^3-9(2x+1))^2=((x+2)^2-3)^3,$$

$$(x+2)^6-18(x+2)^3(2x+1)+81(2x+1)^2=$$

$$=(x+2)^6-9(x+2)^4+27(x+2)^2-27,$$

$$3x^4+18x^3+3x^2=0, \quad x^2(x^2+6x+1)=0.$$

Корнями уравнения $x^2(x^2+6x+1)=0$ являются $x_1=0$, $x_2=-3+2\sqrt{2}$ и $x_3=-3-2\sqrt{2}$. Однако после подстановки полученных значений переменной x в заданное уравнение устанавливаем, что $x_1=0$ не является его корнем.

125. $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $-1\leqslant x\leqslant 1$. Выполним тригонометрическую подстановку, т. е. положим $x=\cos\omega$, где $0\leqslant\omega\leqslant\pi$. В таком случае уравнение принимает вид тригонометрического уравнения $\sqrt{1-\cos^2\omega}=4\cos^3\omega-3\cos\omega$ или

$$|\sin\omega|=4\cos^3\omega-3\cos\omega. \qquad (*)$$

Так как $0\leqslant\omega\leqslant\pi$, то $\sin\omega\geqslant 0$, $|\sin\omega|=\sin\omega$ и уравнение $(*)$ равносильно следующим тригонометрическим уравнениям:

$$\sin\omega=4\cos^3\omega-3\cos, \quad \sin\omega=\cos 3\omega,$$

$$\cos 3\omega-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=0, \quad \sin\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2\omega-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Корнями последнего уравнения являются

$$\omega=\frac{3}{4}\pi+\pi n \quad \text{и} \quad \omega=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, \quad \text{где} \quad n, k \text{ — целые числа.}$$

Поскольку $0\leqslant\omega\leqslant\pi$, то подходящими являются лишь три значения ω, а именно, $\omega_1=\frac{\pi}{8}$, $\omega_2=\frac{5\pi}{8}$ и $\omega_3=\frac{3\pi}{4}$.

Так как $x=\cos\omega$, то заданное уравнение имеет три корня, значения которых вычисляются по формулам

$$x_1=\cos\omega_1=\cos\frac{\pi}{8}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_2=\cos\omega_2=\cos\frac{5\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{5\pi}{4}\right)}=$$

$$=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$x_3=\cos\omega_3=\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, корнями заданного уравнения являются

$$x_1=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

126. $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Из условия задачи следует, что $-1\leqslant x\leqslant 1$. Положим $x=\cos\omega$, где $0\leqslant\omega\leqslant\pi$. Тогда уравнение принимает вид

$$\sqrt{1-\cos\omega}=2\cos^2\omega-1+2\cos\omega\cdot\sqrt{1-\cos^2\omega},$$

$$\sqrt{2}\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|=2\cos^2\omega-1+2\cos\omega\cdot|\sin\omega|. \qquad (*)$$

Так как $0\leqslant\omega\leqslant\pi$, то $\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|=\sin\frac{\omega}{2}$, $|\sin\omega|=\sin\omega$ и из уравнения $(*)$ получаем равносильное уравнение

$$\sqrt{2}\sin\frac{\omega}{2}=\cos 2\omega+\sin 2\omega,$$

которое преобразуем следующим образом:

$$\sqrt{2}\sin\frac{\omega}{2}=\sqrt{2}\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\omega}{2}=0,$$

$$\cos\left(\frac{5\omega}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\sin\left(\frac{3\omega}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=0. \qquad (**)$$

Корнями уравнения $(**)$ являются

$$\omega=\frac{3\pi}{10}+\frac{4\pi n}{5} \quad \text{и} \quad \omega=-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi k}{3},$$

где n, k — целые числа. Однако только одно из найденных корней уравнения $(**)$ принадлежит отрезку $0\leqslant\omega\leqslant\pi$, т. е. $\omega_1=\dfrac{3\pi}{10}$.

Следовательно, заданное уравнение имеет единственный корень $x_1=\cos\dfrac{3\pi}{10}=\cos 54^\circ$.

Примечание. Ответ можно оставить в тригонометрической форме, а можно выразить в радикалах. Для этого необходимо показать, что

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{6-2\sqrt5}}{4},\quad \cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}\quad\text{и}\quad \sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}.$$

Тогда $x_1=\cos 54^\circ=\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$.

127. $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x.$

Решение. Область допустимых значений переменной x в заданном уравнении определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x\geqslant\sqrt2,\\ 2-\sqrt{2+x}\geqslant 0,\end{cases}$$

из которой следует, что $\sqrt2\leqslant x\leqslant 2$.

Так как $\sqrt2\leqslant x\leqslant 2$, то можно положить

$$x=2\cos\omega,\quad \text{где}\quad 0\leqslant\omega\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

В таком случае левая часть заданного уравнения принимает вид

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\omega}}}=$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{4\cos^2\frac{\omega}{2}}}}=\sqrt{2+\sqrt{2-2\left|\cos\frac{\omega}{2}\right|}}=$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{2-2\cos\frac{\omega}{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{4\sin^2\frac{\omega}{4}}}=\sqrt{2+2\left|\sin\frac{\omega}{4}\right|}=$$
$$=\sqrt{2+2\sin\frac{\omega}{4}}=\sqrt2\cdot\left|\sin\frac{\omega}{8}+\cos\frac{\omega}{8}\right|=$$
$$=\sqrt2\cdot\left(\sin\frac{\omega}{8}+\cos\frac{\omega}{8}\right)=2\cos\left(\frac{\omega}{8}-\frac{\pi}{4}\right).$$

При преобразовании левой части уравнения использовался тот факт, что $0\leqslant\omega\leqslant\dfrac{\pi}{4}$. Известно, что при таких значениях ω справедливы неравенства $\cos\dfrac{\omega}{2}\geqslant 0$, $\sin\dfrac{\omega}{4}\geqslant 0$ и $\sin\dfrac{\omega}{8}+\cos\dfrac{\omega}{8}\geqslant 0$.

Принимая во внимания результат преобразования левой части уравнения, получаем тригонометрическое уравнение

$$\cos\left(\frac{\omega}{8}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\omega.$$

Отсюда следует, что $\omega=\pm\left(\dfrac{\omega}{8}-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\pi n$, где n — целое число.

Так как $0\leqslant\omega\leqslant\dfrac{\pi}{4}$, то из равенства $\omega=\pm\left(\dfrac{\omega}{8}-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\pi n$ получаем $\omega_1=\dfrac{2\pi}{9}$ и $x_1=2\cos\omega_1=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$.

128. $\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}.$

Решение. Очевидно, что областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $1\leqslant x\leqslant 3$. Причем на этом отрезке функция $y=\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}$ непрерывна и возрастает, а функция $y=4+\sqrt{3-x}$ непрерывна и убывает. В этой связи заданное уравнение или будет иметь один корень, или не будет иметь их вообще. Этот единственный корень $x_1 = 2$ нетрудно найти подбором.

129. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x \geqslant 1$. Однако левая часть уравнения неотрицательна, поэтому $4 - 2x \geqslant 0$ или $x \leqslant 2$. В этой связи $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Далее, введем новую переменную $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}$.

Тогда

$$y^2 = x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} + x + 3 = 2x + 2 + 2\sqrt{(x-1)(x+3)}$$

и заданное уравнение принимает вид $y^2 + y - 6 = 0$, корнями которого являются $y_1 = 2$ и $y_2 = -3$. Так как $y \geqslant 0$, то $y = 2$.

Поскольку $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}$ и $y = 2$, то рассмотрим уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2$ или $\sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{x+3}$. Так как левая часть последнего уравнения неотрицательна, то

$$2 - \sqrt{x+3} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad x \leqslant 1.$$

Так как ранее было установлено, что $1 \leqslant x \leqslant 2$, то $x = 1$.

Путем подстановки $x = 1$ в заданное уравнение убеждаемся в том, что $x_1 = 1$ — его единственный корень.

130. $\sqrt{\sqrt{2x^2 + x - 3} + 2x^2 - 3} = x$.

Решение. Пусть $y = \sqrt{2x^2 + x - 3}$. Тогда отсюда и из уравнения получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + x - 3} = y, \\ \sqrt{y + 2x^2 - 3} = x. \end{cases} \qquad (*)$$

Из системы уравнений $(*)$ следует, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Возведем в квадрат оба уравнения системы $(*)$, а затем из первого уравнения вычтем второе, тогда получим $x - y = y^2 - x^2$ или $(x - y)(x + y + 1) = 0$.

Поскольку $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $x + y + 1 > 0$. Поэтому из уравнения $(x - y)(x + y + 1) = 0$ получаем $x = y$. В таком случае

любое уравнение системы $(*)$ принимает вид $\sqrt{2x^2 + x - 3} = x$ или $x^2 + x - 3 = 0$.

Квадратное уравнение имеет один положительный корень, а именно, $x_1 = \dfrac{\sqrt{13} - 1}{2}$.

131. $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} + \dfrac{4(y-1) \cdot \sqrt[3]{y-1} + 4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = 10$.

Решение. Преобразуем уравнение, выделяя полные квадраты в левой его части, т. е.

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 4\sqrt[3]{(y-1)^2} + \frac{4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = 10,$$

$$\left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 + 4\left(\sqrt[3]{y-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{y-1}}\right)^2 = 0.$$

Очевидно, что равенство в полученном выражении достигается лишь в том случае, когда каждая из скобок одновременно принимает нулевое значение, т. е. $\sqrt[4]{x} = 1$ и $\sqrt[3]{y-1} = \pm 1$. Отсюда получаем две пары корней заданного уравнения $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ и $x_2 = 1$, $y_2 = 0$.

132. $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

Решение. Обозначим $\sqrt{a + x} = y$. Тогда из заданного уравнения получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a + x} = y, \\ \sqrt{a - y} = x, \end{cases} \qquad (*)$$

из которой следует, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

Далее, оба уравнения системы $(*)$ возведем в квадрат, а затем вычтем из первого уравнения второе уравнение. Тогда

$$x + y = y^2 - x^2 \quad \text{или} \quad (x + y)(x - y + 1) = 0.$$

Рассмотри два случая.

1) Пусть $x + y = 0$, т. е. $x = -y$. Так как $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ — корни системы уравнений $(*)$. Следовательно, $x_1 = 0$ является корнем заданного уравнения при $a = 0$.

2) Пусть $x+1=y$. Тогда из первого уравнения системы $(*)$ получаем

$$x+1=\sqrt{a+x},\quad x^2+2x+1=a+x \quad \text{или} \quad x^2+x+1-a=0.$$

Корнями квадратного уравнения являются $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$. Очевидно, что для существования корней этого уравнения необходимо потребовать выполнялось условия $a\geqslant\dfrac{3}{4}$.

Поскольку $x\geqslant 0$, то $x_3=\dfrac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}$ не может быть корнем исходного уравнения. Потребуем теперь выполнения условия $x_2\geqslant 0$, т.е. $\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\geqslant 0$, $\sqrt{4a-3}\geqslant 1$, $4a\geqslant 4$ или $a\geqslant 1$.

Итак, если $a=0$, то $x_1=0$; если $a\geqslant 1$, то $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$.

§ 2.8. Уравнения с модулями

133. $|x-1|+|2x-6|=5$.

Решение. Уравнение будем решать методом раскрытия модулей. Для этого необходимо рассмотреть три случая.

1) Пусть $x<1$, тогда $x-1<0$, $2x-6<0$ и $|x-1|=-x+1$, $|2x-6|=-2x+6$. В таком случае уравнение принимает вид $3x=2$, т.е. $x=2/3$. Поскольку $x<1$ и полученное значение x входит в рассматриваемый интервал, то $x_1=2/3$ — корень заданного уравнения.
2) Пусть $1\leqslant x<3$, тогда уравнение принимает вид

$$(x-1)-(2x-6)=5 \quad \text{и} \quad x=0.$$

Однако полученное значение x не может быть корнем уравнения, поскольку рассматривается случай, когда $1\leqslant x<3$.
3) Пусть $x\geqslant 3$. Тогда $(x-1)+(2x-6)=5$ и $x=4$. Так как полученное значение x больше 3, то $x_2=4$ — корень уравнения.

Следовательно, заданное уравнение имеет только два корня $x_1=\dfrac{2}{3}$ и $x_2=4$.

134. $|x^2-4|-|x^2-9|=5$.

Решение. Заданное уравнение равносильно уравнению

$$|x^2-9|+5=|x^2-4|. \qquad (*)$$

Известно, что равенство $|f(x)|+|g(x)|=|f(x)+g(x)|$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x)\cdot g(x)\geqslant 0$.

Так как $(x^2-9)+5=x^2-4$, то из уравнения $(*)$ получаем неравенство $5(x^2-9)\geqslant 0$ или $x^2\geqslant 9$. Отсюда следует, что корнями уравнения $(*)$ являются произвольные значения x, удовлетворяющих совокупности неравенств $x\leqslant -3$ и $x\geqslant 3$.

135. $|x^2-3x-10|+|x^2-7x+10|=20-4x$.

Решение. Обозначим $f(x)=x^2-3x-10$ и $g(x)=x^2-7x+10$, тогда уравнение принимает вид $|f(x)|+|g(x)|=-f(x)+g(x)$. Такое равенство означает, что $|f(x)|=-f(x)$ и $|g(x)|=g(x)$, т.е. $f(x)\leqslant 0$ и $g(x)\geqslant 0$.

Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x-10\leqslant 0,\\ x^2-7x+10\geqslant 0,\end{cases}$$

которая равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} (x-5)(x+2)\leqslant 0,\\ (x-5)(x-2)\geqslant 0.\end{cases}$$

Решением приведенных выше систем неравенств являются $x_1=5$ и $-2\leqslant x\leqslant 2$.

136. $||x+4|-2x|=3x-1$.

Решение. Так как левая часть уравнения неотрицательна, то

$$3x-1\geqslant 0 \quad \text{и} \quad x\geqslant 1/3.$$

Отсюда следует, что $x+4>0$. В этой связи $|x+4|=x+4$ и заданное уравнение принимает вид

$$|x+4-2x|=3x-1,\quad |4-x|=3x-1.$$

Следовательно, имеем $4-x=\pm(3x-1)$. Отсюда получаем $x_1=5/4$ и $x_2=-3/2$. Поскольку $x\geqslant 1/3$, то единственным корнем заданного уравнения является $x_1=5/4$.

137. $\dfrac{|x-2|+|x+3|-5}{|x-6|+|x+1|-7}=0.$

Решение. Заданное уравнение равносильно следующей системе, состоящей из одного уравнения и одного неравенства:

$$\begin{cases} |x-2|+|x+3|-5=0, \\ |x-6|+|x+1|-7\neq 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Известно, что равенство $|f(x)|+|g(x)|=|f(x)-g(x)|$ равносильно неравенству $f(x)\cdot g(x)\leqslant 0$. В этой связи корнями уравнений $|x-2|+|x+3|=5$ и $|x-6|+|x+1|=7$ будут, соответственно, $-3\leqslant x\leqslant 2$ и $-1\leqslant x\leqslant 6$.

Из системы $(*)$ следует, что для поиска корней заданного уравнения необходимо из отрезка $-3\leqslant x\leqslant 2$ исключить все значения x, которые попадают на отрезок $-1\leqslant x\leqslant 6$. Таким образом, корнями уравнения являются $-3\leqslant x<-1$.

138. $|x-2|+|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|=x^2-4.$

Решение. Так как левая часть уравнения неотрицательна, то $x^2-4\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant -2$ и $x\geqslant 2$.

Рассмотрим два случая.

1) Если $x\leqslant -2$, то выражения под каждым из пяти модулей будут меньше или равны нулю. Тогда, используя свойство модуля, уравнение можно переписать как

$$-(x-2)-(x-1)-x-(x+1)-(x+2)=x^2-4$$

или

$$x^2+5x-4=0.$$

Так как $x\leqslant -2$, то подходящим корнем квадратного уравнения является $x_1=\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2}$.

2) Если $x\geqslant 2$, то заданное уравнение принимает вид

$$(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=x^2-4$$

или

$$x^2-5x-4=0.$$

Так как $x\geqslant 2$, то $x_2=\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$.

139. $x^4-7x^2+2x+2=|4x-1|-|2x^2-3|.$

Решение. Если обозначить $|4x-1|=y$ и $|2x^2-3|=z$, то получим

$$z^2-y^2=(2x^2-3)^2-(4x-1)^2,$$
$$z^2-y^2=4x^4-12x^2+9-16x^2+8x-1,$$
$$z^2-y^2=4x^4-28x^2+8x+8,$$
$$z^2-y^2=4(x^4-7x^2+2x+2).$$

Тогда заданное уравнение принимает вид $z^2-y^2=4(y-z)$ или $(y-z)(y+z+4)=0$. Следовательно, имеем $y-z=0$ или $y+z=-4$.

Рассмотрим два уравнения относительно переменной x.

1) Пусть $y=z$. Тогда $|4x-1|=|2x^2-3|$ или $4x-1=\pm(2x^2-3)$. Отсюда получаем два квадратных уравнения $x^2-2x-1=0$ и $x^2+2x-2=0$, корнями которых являются $x_1=1+\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=-1+\sqrt{3}$ и $x_4=-1-\sqrt{3}$.
2) Пусть $y+z=-4$, тогда $|4x-1|+|2x^2-3|=-4$. Однако данное уравнение корней не имеет, поскольку его левая часть может принимать только неотрицательные значения.

140. $3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|.$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x\geqslant -6$. Введем в рассмотрение функцию

$$f(x)=3x-2|x-2|.$$

Нетрудно видеть, что заданное уравнение принимает вид функционального уравнения $f(x)=f(\sqrt{3x+18})$.

Используя свойства модуля, функцию $y=f(x)$ можно представить, как

$$f(x)=\begin{cases} 5x-4, & \text{если } x<2; \\ x+4, & \text{если } x\geqslant 2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что функция $y=f(x)$ является непрерывной и возрастающей на всей числовой оси OX.

Следовательно, на области допустимых значений x уравнение $f(x)=f(\sqrt{3x+18})$ равносильно уравнению $x=\sqrt{3x+18}$.

Отсюда имеем $x \geqslant 0$. Далее, после возведения в квадрат обеих частей уравнения получаем квадратное уравнение

$$x^2 - 3x - 18 = 0,$$

которое имеет единственный положительный корень $x_1 = 6$.

141. $\sqrt{x^2 - 9x + 24} - \sqrt{6x^2 - 59x + 149} = |5 - x|$.

Решение. Так как правая часть уравнения неотрицательна, то

$$\sqrt{x^2 - 9x + 24} - \sqrt{6x^2 - 59x + 149} \geqslant 0.$$

Отсюда получаем

$$x^2 - 9x + 24 \geqslant 6x^2 - 59x + 149,$$
$$5x^2 - 50x + 125 \leqslant 0,$$
$$(x-5)^2 \leqslant 0 \quad \text{или} \quad x = 5.$$

Следовательно, левая часть уравнения принимает неотрицательное значение лишь при $x = 5$. А это значит, что его корнем может быть только это значение, а может случиться, что уравнение вообще не будет иметь корней. Для разрешения этого вопроса подставим значение $x = 5$ в исходное уравнение. Так как при этом обе части уравнения обращаются в 0 то $x_1 = 5$ является его корнем.

§ 2.9. Системы уравнений

142. $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5, \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 1. \end{cases}$

Решение. Пусть $\sqrt{7x+y} = u$ и $\sqrt{2x+y} = v$, тогда первое уравнение системы принимает вид $u + v = 5$.

Для того, чтобы второе уравнение системы выразить через переменные u и v, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + y = u^2, \\ 2x + y = v^2, \end{cases}$$

из которой следует, что $x = \dfrac{u^2 - v^2}{5}$ и $y = -\dfrac{2u^2 - 7v^2}{5}$.

В таком случае второе уравнение заданной системы принимает вид

$$v + \frac{u^2 - v^2}{5} + \frac{2u^2 - 7v^2}{5} = 1, \quad \text{или} \quad 3u^2 - 8v^2 + 5v = 5.$$

Таким образом, заданная система уравнений равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ 3u^2 - 8v^2 + 5v = 5, \end{cases}$$

где $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$.

Так как $u + v = 5$, то $u = 5 - v$ и из второго уравнения вытекает квадратное уравнение $v^2 + 5v - 14 = 0$, которое имеет единственный положительный корень $v_1 = 2$. Поскольку $u = 5 - v$, то $u_1 = 3$. С учетом того, что $\sqrt{7x+y} = u$ и $\sqrt{2x+y} = v$, получаем новую систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + y = 9, \\ 2x + y = 4, \end{cases}$$

корнями которой являются $x_1 = 1$ и $y_1 = 2$.

143. $\begin{cases} 1 + xy = \dfrac{18xy}{x+y}, \\ 1 + x^2y^2 = \dfrac{208x^2y^2}{x^2+y^2}. \end{cases}$

Решение. Приведем систему уравнений к равносильному виду

$$\begin{cases} \dfrac{(1+xy)(x+y)}{xy} = 18, \\ \dfrac{(1+x^2y^2)(x^2+y^2)}{x^2y^2} = 208. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{xy} + 1\right)(x+y) = 18, \\ \left(\dfrac{1}{x^2y^2} + 1\right)(x^2+y^2) = 208, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = 18, \\ x^2 + \dfrac{1}{x^2} + y^2 + \dfrac{1}{y^2} = 208. \end{cases} \qquad (*)$$

Введем новые переменные $u = x + \dfrac{1}{x}$ и $v = y + \dfrac{1}{y}$. Тогда $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = u^2 - 2$, $y^2 + \dfrac{1}{y^2} = v^2 - 2$ и систему уравнений $(*)$ можно переписать, как

$$\begin{cases} u + v = 18, \\ u^2 + v^2 = 212. \end{cases}$$

Корнями последней системы уравнений являются две пары чисел $u_1 = 4$, $v_1 = 14$ и $u_2 = 14$, $v_2 = 4$.

Для нахождения корней исходной системы уравнений необходимо рассмотреть две системы уравнений относительно переменных x и y следующего вида:

1) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 4, \\ y + \dfrac{1}{y} = 14, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0, \\ y^2 - 14y + 1 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 14, \\ y + \dfrac{1}{y} = 4, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} x^2 - 14x + 1 = 0, \\ y^2 - 4y + 1 = 0. \end{cases}$

Корнями приведенных выше систем уравнений являются восемь пар значений переменных x и y, т. е.

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{3}, \\ y_1 = 7 + 4\sqrt{3}, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 - \sqrt{3}, \\ y_2 = 7 + 4\sqrt{3}, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2 + \sqrt{3}, \\ y_3 = 7 - 4\sqrt{3}, \end{cases} \begin{cases} x_4 = 2 - \sqrt{3}, \\ y_4 = 7 - 4\sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 7 + 4\sqrt{3}, \\ y_5 = 2 + \sqrt{3}, \end{cases} \begin{cases} x_6 = 7 - 4\sqrt{3}, \\ y_6 = 2 + \sqrt{3}, \end{cases} \begin{cases} x_7 = 7 + 4\sqrt{3}, \\ y_7 = 2 - \sqrt{3}, \end{cases} \begin{cases} x_8 = 7 - 4\sqrt{3}, \\ y_8 = 2 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

144. $\begin{cases} xy + yz + xz = 12, \\ xyz = 2 + x + y + z, \end{cases}$ где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Решение. Используя неравенство Коши (1) при $n = 3$ и тот факт, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, из первого уравнения системы получаем верхнюю оценку выражения xyz. Имеет место

$$12 = xy + yz + xz \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{(xyz)^2}.$$

Отсюда следует, что $xyz \leqslant 8$.

Применяя неравенство Коши (1) при $n = 4$ ко второму уравнению системы, получаем нижнюю оценку xyz. Имеем

$$xyz = 2 + x + y + z \geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{2xyz} \quad \text{и} \quad xyz \geqslant 8.$$

Поскольку $xyz \geqslant 8$ и $xyz \leqslant 8$, то $xyz = 8$. Отсюда следует, что приведенное выше неравенство Коши превращается в равенство, а это означает, что $x_1 = y_1 = z_1 = 2$. Подстановкой в уравнения заданной системы убеждаемся, что найденные значения x_1, y_1, z_1 являются ее корнями.

145. $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 - y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$

Решение. Произведем замену переменных $x - y = u$ и $xy = v$. В таком случае система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} u + z = 6, \\ u^2 + 2v + z^2 = 14, \\ u(u^2 + 3v) + z^3 = 36. \end{cases} \qquad (*)$$

Из первого уравнения системы $(*)$ получаем $u = 6 - z$, а из второго уравнения следует, что $(6 - z)^2 + 2v + z^2 = 14$ и $v = 6z - z^2 - 11$. Подставим полученные выражения u и v в третье уравнение системы $(*)$. Тогда

$$(6 - z)((6 - z)^2 + 3(6z - z^2 - 11)) + z^3 = 36,$$
$$(6 - z)(3 + 6z - 2z^2) + z^3 = 36,$$
$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0.$$

Корнями последнего уравнения являются

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 2 \quad \text{и} \quad z_3 = 3.$$

Так как $u = 6 - z$ и $v = 6z - z^2 - 11$, то $u_1 = 5$, $v_1 = -6$, $u_2 = 4$, $v_2 = -3$ и $u_3 = 3$, $v_3 = -2$.

Для вычисления значений переменных x и y рассмотрим три системы уравнений.

1) Если $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = -6, \end{cases}$ то получаем квадратное уравнение

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

корнями которого являются $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Тогда $y_1 = -3$ и $y_2 = -2$.

2) Если $\begin{cases} x - y = 4, \\ xy = -3, \end{cases}$ то, решая уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, получаем $x_3 = 1$ и $x_4 = 3$. В таком случае $y_3 = -3$ и $y_4 = -1$.

3) Если $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = -2, \end{cases}$ то , решая уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$, получаем $x_5 = 1$, $x_6 = 2$. Тогда $y_5 = -2$ и $y_6 = -1$.

Итак, заданная система уравнений имеет следующие шесть троек корней:

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 2, & y_1 = -3, & z_1 = 1; & x_4 = 3, & y_4 = -1, & z_4 = 2; \\ x_2 = 3, & y_2 = -2, & z_2 = 1; & x_5 = 1, & y_5 = -2, & z_5 = 3; \\ x_3 = 1, & y_3 = -3, & z_3 = 2; & x_6 = 2, & y_6 = -1, & z_6 = 3. \end{array}$$

146. $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + xz = 9, \\ xz + xy = 5. \end{cases}$

Решение. Путем сложения левых и правых частей уравнений заданной системы получаем $xy + xz + yz = 11$. Если из данного уравнения вычесть поочередно уравнения системы, то получим $xy = 2$, $xz = 3$ и $yz = 6$. Перемножим между собой приведенные выше три уравнения, тогда $x^2y^2z^2 = 36$ или $xyz = \pm 6$.

Если $xyz = 6$, то $x_1 = \dfrac{6}{yz} = 1$, $y_1 = \dfrac{6}{xz} = 2$ и $z_1 = \dfrac{6}{xy} = 3$.

Если $xyz = -6$, то $x_2 = \dfrac{-6}{yz} = -1$, $y_2 = \dfrac{-6}{xz} = -2$ и $z_2 = \dfrac{-6}{xy} = -3$.

147. $\begin{cases} xy + x + y = 1, \\ xz + x + z = 2, \\ yz + y + z = 5. \end{cases}$

Решение. Первоначально к обеим частям каждого из уравнений системы прибавим 1, тогда

$$\begin{cases} xy + x + y + 1 = 2, \\ xz + x + z + 1 = 3, \\ yz + y + z + 1 = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x+1)(y+1) = 2, \\ (x+1)(z+1) = 3, \\ (y+1)(z+1) = 6. \end{cases}$$

Из последней системы уравнений следует

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = 36 \quad \text{или} \quad (x+1)(y+1)(z+1) = \pm 6.$$

Пусть $(x+1)(y+1)(z+1) = 6$, тогда

$$x + 1 = \frac{6}{(y+1)(z+1)} = \frac{6}{6} = 1,$$
$$y + 1 = \frac{6}{(x+1)(z+1)} = \frac{6}{3} = 2,$$
$$z + 1 = \frac{6}{(x+1)(y+1)} = \frac{6}{2} = 3$$

или $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $z_1 = 2$.

Если $(x+1)(y+1)(z+1) = -6$, то по аналогии с предыдущим случаем получаем $x_2 = -2$, $y_2 = -3$, $z_2 = -4$.

148. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3{,}9, \\ y + [z] + \{x\} = 3{,}5, \\ z + [x] + \{y\} = 2. \end{cases}$$

Решение. Известно, что

$$x = [x] + \{x\}, \quad y = [y] + \{y\} \quad \text{и} \quad z = [z] + \{z\}.$$

В этой связи система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} [x] + \{x\} + [y] + \{z\} = 3{,}9, \\ [y] + \{y\} + [z] + \{x\} = 3{,}5, \\ [z] + \{z\} + [x] + \{y\} = 2. \end{cases} \qquad (*)$$

Складывая уравнения системы $(*)$, получаем
$$[x]+\{x\}+[y]+\{y\}+[z]+\{z\}=4{,}7.$$

Если из приведенного выше уравнения вычесть последовательно первое, второе и третье уравнения системы $(*)$, то получим систему уравнений
$$\begin{cases} [z]+\{y\}=0{,}8, \\ [x]+\{z\}=1{,}2, \\ [y]+\{x\}=2{,}7. \end{cases} \qquad (**)$$

Поскольку выражения $[x]$, $[y]$, $[z]$ могут принимать только целые значения и $0\leqslant\{x\}<1$, $0\leqslant\{y\}<1$, $0\leqslant\{z\}<1$, то из системы уравнений $(**)$ следует, что $[x]=1$, $\{x\}=0{,}7$; $[y]=2$, $y=0{,}8$ и $[z]=0$, $z=0{,}2$.

Так как $x=[x]+\{x\}$, $y=[y]+\{y\}$ и $z=[z]+\{z\}$, то $x_1=1{,}7$; $y_1=2{,}8$ и $z_1=0{,}2$.

149. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ xy+xz+yz=11, \\ xyz=6, \end{cases}$ где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Решение. Если второе уравнение системы умножить на 2 и сложить его с первым уравнением, то $(x+y+z)^2=36$ и $x+y+z=\pm 6$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x+y+z=6$. Тогда $y+z=6-x$, а из третьего уравнения следует $yz=\dfrac{6}{x}$. Перепишем второе уравнение системы, как $x(y+z)+yz=11$. Отсюда нетрудно получить уравнение относительно переменной x, т. е. $x(6-x)+\dfrac{6}{x}=11$, которое равносильно уравнению третьей степени $x^3-6x^2+11x-6=0$ или $(x-1)(x^2-5x+6)=0$. Отсюда получаем три корня $x_1=1$, $x_2=2$ и $x_3=3$.

Так как $y+z=6-x$ и $yz=\dfrac{6}{x}$, то для нахождения значений переменных y, z необходимо рассмотреть три системы уравнений
$$\begin{cases} y+z=5, \\ yz=6, \end{cases} \quad \begin{cases} y+z=4, \\ yz=3, \end{cases} \quad \begin{cases} y+z=3, \\ yz=2. \end{cases}$$

Корнями приведенных выше систем уравнений являются
$$\begin{aligned} &y_1=2, z_1=3, \quad && y_2=3, z_2=2, \\ &y_3=1, z_3=3, && y_4=3, z_4=1, \\ &y_5=1, z_5=2, && y_6=2, z_6=1. \end{aligned}$$

2) Пусть $x+y+z=-6$. Очевидно, что в таком случае исходная система уравнений будет иметь хотя один отрицательный корень, а это противоречит условию задачи.

Следовательно, корнями заданной системы уравнений являются
$$\begin{aligned} &x_1=1, \ y_1=2, \ z_1=3; \quad && x_2=1, \ y_2=3, \ z_2=2; \\ &x_3=2, \ y_3=1, \ z_3=3; && x_4=2, \ y_4=3, \ z_4=1; \\ &x_5=3, \ y_5=1, \ z_5=2; && x_6=3, \ y_6=2, \ z_6=1. \end{aligned}$$

150. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt{x^2+7x+11}\geqslant 2, \\ x^2+8x+12\leqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x+3}=u$ и $\sqrt{x^2+7x+11}=v$. Тогда система неравенств принимает вид
$$\begin{cases} u+v\geqslant 2, \\ u^2+v^2\leqslant 2, \end{cases} \qquad (*)$$
где $u\geqslant 0$ и $v\geqslant 0$.

Если первое неравенство системы $(*)$ умножить на -2, а затем сложить его со вторым неравенством, то
$$u^2-2u+v^2-2v\leqslant -2 \quad \text{и} \quad (u-1)^2+(v-1)^2\leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $u=v=1$. Так как $\sqrt{x+3}=u$, то $\sqrt{x+3}=1$ и $x_1=-2$.

Далее, подставим значение $x_1=-2$ в заданную систему неравенств и убедимся, что оно является ее решением.

151. $\begin{cases} x+yz=6, \\ y+xz=6, \\ z+xy=6. \end{cases}$

Решение. Если вычесть первое уравнение системы из второго и третьего уравнений, то получим $\begin{cases} x + yz = 6; \\ (x-y)(z-1) = 0; \\ (x-z)(y-1) = 0. \end{cases}$

Отсюда следует, что для отыскания корней заданной системы уравнений необходимо рассмотреть четыре системы уравнений

$$\begin{cases} x + yz = 6; \\ x - y = 0; \\ x - z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + yz = 6; \\ x - y = 0; \\ y - 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + yz = 6; \\ z - 1 = 0; \\ x - z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + yz = 6; \\ z - 1 = 0; \\ y - 1 = 0. \end{cases}$$

Приведенные выше системы уравнений имеют следующие корни:

$$\begin{array}{lll} x_1 = -3, & y_1 = -3, & z_1 = -3; \\ x_2 = 2, & y_2 = 2, & z_2 = 2; \\ x_3 = 1, & y_3 = 1, & z_3 = 5; \\ x_4 = 1, & y_4 = 5, & z_4 = 1 \\ x_5 = 5, & y_5 = 1, & z_5 = 1. \end{array}$$

152. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 5 = 4z, \\ x - y = z. \end{cases}$

Решение. Так как $z = x - y$, то из первого уравнения системы получаем

$$x^2 + 4y^2 + 5 = 4(x-y),$$
$$x^2 + 4y^2 + 5 - 4x + 4y = 0,$$
$$(x-2)^2 + (2y+1)^2 = 0. \qquad (*)$$

Поскольку $(x-2)^2 \geqslant 0$ и $(2y+1)^2 \geqslant 0$, то из уравнения $(*)$ следует, что $x - 2 = 0$ и $2y - 1 = 0$. Следовательно, $x_1 = 2$ и $y_1 = -\frac{1}{2}$.

Если найденные значения x_1 и y_1 подставить во второе уравнение заданной системы, то $z_1 = x_1 - y_1 = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$.

Таким образом, корнями заданной системы уравнений являются $x_1 = 2$, $y_1 = -\frac{1}{2}$ и $z_1 = \frac{5}{2}$.

153. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} = \sqrt{2}, \\ y^4 + 19 = 20(x+y). \end{cases}$

Решение. Поскольку $\sqrt{x} \geqslant 0$ и $\sqrt{x+2y} \geqslant 0$, то из первого уравнения системы следует, что $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{2}$ или $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Возведем в квадрат первое уравнение системы, тогда

$$x + 2\sqrt{x(x+2y)} + x + 2y = 2,$$
$$x + y + \sqrt{x^2 + 2xy} = 1,$$
$$\sqrt{x^2 + 2xy} = 1 - (x+y). \qquad (*)$$

Отсюда получаем $1 - (x+y) \geqslant 0$ или $x + y \leqslant 1$. Далее преобразуем уравнение $(*)$ следующим образом:

$$\sqrt{(x+y)^2 - y^2} = 1 - (x+y),$$
$$(x+y)^2 - y^2 = 1 - 2(x+y) + (x+y)^2,$$
$$2(x+y) - y^2 = 1,$$
$$x + y = \frac{y^2+1}{2}.$$

Так как $x + y \leqslant 1$ и $x + y = \frac{y^2+1}{2}$, то $\frac{y^2+1}{2} \leqslant 1$ или $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Если выражение $x + y = \frac{y^2+1}{2}$ подставить во второе уравнение заданной системы, то получим биквадратное уравнение

$$y^4 + 19 = 10(y^2 + 1), \quad \text{или} \quad y^4 - 10y^2 + 9 = 0.$$

Корнями последнего уравнения являются $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 3$ и $y_4 = -3$. Так как ранее было установлено, что $-1 \leqslant y \leqslant 1$, то подходящими корнями данного уравнения будут $y_1 = 1$ и $y_2 = -1$. Если найденные значения y подставить во второе уравнение системы, то получим $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

154. $\begin{cases} x^3y + x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + xy^3 = 30, \\ x^2y + xy + x + y + xy^2 = 11. \end{cases}$

Решение. Преобразуем уравнения системы следующим образом:

$$\begin{cases} xy\big((x+y)^2 + xy(x+y)\big) = 30, \\ xy(x+y) + xy + x + y = 11. \end{cases}$$

Введем новые переменные $a = x + y$ и $b = xy$, тогда приведенная выше система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} ab(a+b) = 30, \\ ab + a + b = 11. \end{cases} \qquad (*)$$

С целью упрощения решения системы уравнений $(*)$ введем еще две переменные $u = a+b$, $v = ab$ и получим систему уравнений

$$\begin{cases} uv = 30, \\ u + v = 11, \end{cases}$$

которая имеет две пары корней $u_1 = 5$, $v_1 = 6$ и $u_2 = 6$, $v_2 = 5$.

Для вычисления значений переменных a и b необходимо рассмотреть две системы уравнений

$$\begin{cases} a + b = 5, \\ ab = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a + b = 6, \\ ab = 5. \end{cases}$$

Корнями приведенных выше систем уравнений являются четыре пары $a_1 = 2, b_1 = 3$; $a_2 = 3, b_2 = 2$, $a_3 = 1, b_3 = 5$ и $a_4 = 5, b_4 = 1$.

Очевидно, что для нахождения корней заданной системы уравнений необходимо рассмотреть уже четыре системы уравнений относительно переменных x и y, т. е.

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Системы уравнений относительно переменных x и y не являются сложными. Первая и третья системы уравнений корней не имеют, а остальные две системы уравнений имеют по два корня.

Отсюда нетрудно определить следующие корни заданной системы уравнений: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, $x_3 = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$, $y_3 = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ и $x_4 = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$, $y_4 = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$.

155. $$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы умножим на 5, а второе — на 2. После сложения полученных выражений получаем

$$56x^2 + 21y^2 - 224x - 42y + 245 = 0,$$
$$8x^2 + 3y^2 - 32x - 6y + 35 = 0,$$
$$8(x-2)^2 + 3(y-1)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $x_1 = 2$, $y_1 = 1$. Подставим полученные значения переменных x и y в уравнения системы и убедимся в том, что $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ являются корнями этой системы уравнений.

156. $$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Решение. Непосредственной подстановкой в уравнения системы нетрудно установить, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Затем первое уравнение системы умножим на -2 и сложим его со вторым уравнением. Тем самым получим однородное уравнение второй степени $3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0$. Так как $y \neq 0$, то обе части однородного уравнения разделим на y^2 и обозначим $\dfrac{x}{y} = z$. Тогда получим квадратное уравнение $3z^2 - 8z + 4 = 0$, корнями которого являются $z_1 = 2$ и $z_2 = \dfrac{2}{3}$.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $z = 2$, т. е. $x = 2y$. Тогда первое уравнение заданной системы принимает вид $2(2y)^2 - 3(2y)y + y^2 = 3$ или $y^2 = 1$. Отсюда получаем корни системы уравнений $x_1 = 2, y_1 = 1$ и $x_2 = -2, y_2 = -1$.

2) Пусть $z = \dfrac{2}{3}$, т. е. $x = \dfrac{2y}{3}$. Тогда из первого уравнения системы получаем $2\left(\dfrac{2y}{3}\right)^2 - 3\left(\dfrac{2y}{3}\right)y + y^2 = 3$ или $y^2 = -27$. Очевидно, что в таком случае система уравнений корней не имеет.

Следовательно, заданная система уравнений имеет корни $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ и $x_2 = -2$, $y_2 = -1$.

157. $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x = y^2, \\ y^3 - 3y^2 + 2y = x^2. \end{cases}$

Решение. Поскольку правые части уравнений системы неотрицательны, то $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x \geqslant 0; \\ y^3 - 3y^2 + 2y \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x(x-1)(x-2) \geqslant 0; \\ y(y-1)(y-2) \geqslant 0. \end{cases}$

Отсюда, используя известный метод интервалов, получаем решения систем неравенств вида $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $x \geqslant 2$, а также $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $y \geqslant 2$.

Если из первого уравнения заданной системы вычесть второе уравнение, то

$$\begin{gathered} x^3 - y^3 - 3(x^2 - y^2) + 2(x - y) = y^2 - x^2, \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2) - (x-y)(3x+3y) + \\ + 2(x-y) + (x-y)(x+y) = 0, \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2) = 0 \end{gathered}$$

или

$$(x-y)\big((x-1)^2 + (y-1)^2 + xy\big) = 0. \qquad (*)$$

Нетрудно убедиться в том, что если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + xy > 0.$$

В этой связи из уравнения $(*)$ следует, что $x-y=0$ или $x=y$.

Подставим $x = y$ в любое из уравнений заданной системы. Тогда $x^3 - 4x^2 + 2x = 0$ или $x(x^2 - 4x + 2) = 0$. Отсюда получаем $x_1 = 0$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ и $x_3 = 2 + \sqrt{2}$.

Отметим, что найденные значения x_1, x_2, x_3 входят в область допустимых значений переменной x.

Так как $x = y$, то $y_1 = 0$, $y_2 = 2 - \sqrt{2}$ и $y_3 = 2 + \sqrt{2}$.

158. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения системы следует, что $xyz \neq 0$. Если второе уравнение умножить на xyz, то получим уравнение

$$xy + xz + yz = 0. \qquad (*)$$

Из первого уравнения системы имеем $x+y = -z$. Подставим выражение для $x + y$ в уравнение $(*)$, тогда $xy + z(x+y) = 0$, $xy - z^2 = 0$ и $xy = z^2$. Аналогично получаем $xz = y^2$ и $yz = x^2$.

Следовательно, уравнение $(*)$ равносильно уравнению

$$z^2 + y^2 + x^2 = 0,$$

из которого следует, что $x = y = z = 0$. Однако $xyz \neq 0$, поэтому заданная система уравнений является несовместной.

159. $\begin{cases} x + y + 2z = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{4}{5}xy - z^2 + 2z = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения системы получаем

$$x + y = \frac{3}{2} - 2z, \quad (x+y)^2 = \left(\frac{3}{2} - 2z\right)^2$$

или

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4z^2 - 6z + \frac{9}{4}. \qquad (*)$$

Второе уравнение системы равносильно уравнению

$$4xy = 5z^2 - 10z + \frac{25}{4}. \qquad (**)$$

Если из уравнения $(*)$ вычесть уравнение $(**)$, то

$$x^2 - 2xy + y^2 = -z^2 + 4z - 4, \quad \text{или} \quad (x-y)^2 = -(z-2)^2.$$

Так как $(x-y)^2 \geqslant 0$ и $-(z-2)^2 \leqslant 0$, то из уравнения $(x-y)^2 = -(z-2)^2$ следует, что $x - y = 0$ и $z - 2 = 0$ или $x_1 = y_1$ и $z_1 = 2$. В таком случае первое уравнение системы принимает вид $x_1 + x_1 + 4 = \dfrac{3}{2}$ или $x_1 = -\dfrac{5}{4}$.

Подставим в уравнения системы значения $x_1 = -\dfrac{5}{4}$, $y_1 = -\dfrac{5}{4}$, $z_1 = 2$ и убедимся в том, что найденные значения переменных x, y, z являются ее корнями.

160. $\begin{cases} x + \dfrac{1}{yz} + z^2 = 3, \\ y + \dfrac{1}{xz} = 2, \end{cases}$ где $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$.

Решение. Первоначально второе уравнение системы умножим на z, а затем сложим его с первым уравнением, тогда

$$x + \frac{1}{yz} + z^2 + yz + \frac{1}{x} = 3 + 2z,$$

$$x + \frac{1}{x} + yz + \frac{1}{yz} + z^2 - 2z + 1 = 4$$

или

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(yz + \frac{1}{yz}\right) + (z-1)^2 = 4. \qquad (*)$$

Поскольку $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то с учетом неравенства Коши (3), получаем $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ и $yz + \dfrac{1}{yz} \geqslant 2$. Так как при этом $(z-1)^2 \geqslant 0$, то

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(yz + \frac{1}{yz}\right) + (z-1)^2 \geqslant 4.$$

Следовательно, равенство в уравнении $(*)$ достигается только в том случае, когда $x + \dfrac{1}{x} = 2$, $yz + \dfrac{1}{yz} = 2$ и $(z-1)^2 = 0$. Отсюда получаем корни заданной системы уравнений вида $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ и $z_1 = 1$.

161. $\begin{cases} x^2 + 1 = 2\sqrt{yz}, \\ y^2 - 1 = 2xz\sqrt{1 - 4yz}. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения системы получаем неравенство $2\sqrt{yz} = x^2 + 1 \geqslant 1$ или $4yz \geqslant 1$. Из второго уравнения системы следует, что $1 - 4yz \geqslant 0$, т. е. $4yz \leqslant 1$. Принимая во внимание оба неравенства относительно yz, делаем вывод о том, что $4yz = 1$. Если найденное значение $yz = \dfrac{1}{4}$ подставить в уравнения системы, то $x = 0$ и $y = \pm 1$.

Так как $z = \dfrac{1}{4y}$, то имеем две тройки чисел

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad x_2 = 0, \quad y_2 = -1, \quad z_2 = -\frac{1}{4},$$

которые могут быть корнями заданной системы уравнений.

Подставим найденные значения переменных x, y, z в уравнения системы и убедимся, что это действительно так.

162. $\begin{cases} 3 - (y+1)^2 = \sqrt{x - y}, \\ x + 8y = \sqrt{x - y - 9}. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения системы следует, что

$$\sqrt{x - y} = 3 - (y+1)^2 \leqslant 3$$

или $x - y \leqslant 9$. Вместе с тем из второго уравнения получаем $x - y - 9 \geqslant 0$, т. е. $x - y \geqslant 9$. Следовательно, имеет место равенство $x - y = 9$.

В таком случае система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} 3 - (y+1)^2 = 3, \\ x + 8y = 0, \\ x - y = 9, \end{cases}$$

корнями которой являются $x_1 = 8$ и $y_1 = -1$.

163. $\begin{cases} |xy - 2| = 6 - x^2, \\ 3y^2 + 2 = 2xy. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения системы следует, что $6 - x^2 \geqslant 0$ или $x^2 \leqslant 6$. Далее, будем рассматривать второе уравнение системы как уравнение второй степени относительно переменной y.

Известно, что уравнение $3y^2 - 2xy + 2 = 0$ имеет действительные корни только в том случае, когда его дискриминант неотрицательный, т. е. $D = x^2 - 6 \geqslant 0$ или $x^2 \geqslant 6$. Ранее было установлено, что $x^2 \leqslant 6$. Тогда имеем $x^2 = 6$ и уравнения системы принимают вид $xy = 2$ (первое уравнение), $3y^2 = 2$ (второе уравнение).

Корнями системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 = 6, \\ xy = 2, \\ 3y^2 = 2 \end{cases}$$

являются $x_1 = \sqrt{6}$, $y_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ и $x_2 = -\sqrt{6}$, $y_2 = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

164. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$

Решение. Областью допустимых значений переменных x и y в системе уравнений являются $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

Первое уравнение системы умножим на $\sqrt{2}$, а второе уравнение возведем в квадрат, тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+2y^2} + 2\sqrt{xy} = 16, \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16. \end{cases}$$

Если в полученной системе вычесть из первого уравнения второе, то $\sqrt{2x^2+2y^2} = x + y$. Далее, возведем в квадрат обе части уравнения, тогда $2x^2+2y^2 = x^2+2xy+y^2$ или $(x-y)^2 = 0$.

Отсюда следует, что $x = y$. В таком случае из второго уравнения системы получаем $2\sqrt{x} = 4$ или $x_1 = 4$.

Поскольку $x = y$, то корнями заданной системы уравнений являются $x_1 = 4$ и $y_1 = 4$.

165. $\begin{cases} xz = y + 2, \\ x + z = 2\sqrt{y}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}\right). \end{cases}$

Решение. Очевидно, что областью допустимых значений переменных x, y и z в системе уравнений являются $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Преобразуем второе уравнение системы следующим образом:

$$x + z = 2\sqrt{xy} - 2y + 2\sqrt{yz}$$
$$(x - 2\sqrt{xy} + y) + (y - 2\sqrt{yz} + z) = 0,$$
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $x = y = z$. В таком случае первое уравнение системы принимает вид квадратного уравнения $x^2 - x - 2 = 0$,

откуда получаем $x_1 = 2$ и $x_2 = -1$. Однако $x_2 = -1$ не входит в область допустимых значений переменной x. Так как $x = y = z$, то корнями системы уравнений являются $x_1 = 2$, $y_1 = 2$ и $z_1 = 2$.

166. $\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ 4y^2 + z^2 = 8y, \\ (x+3)(2z - x) = 5x + 16, \end{cases}$ где $z \geqslant 0$.

Решение. Из второго уравнения системы имеем $z^2 + 4(y-1)^2 = 4$, откуда следует $z^2 \leqslant 4$, т. е. $-2 \leqslant z \leqslant 2$. Далее, третье уравнение системы представим как квадратное уравнение относительно переменной x, т. е. имеет место

$$x^2 - 2x(z-4) + 16 - 6z = 0,$$

которое имеет действительные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен, т. е. $D = (z-4)^2 + 6z - 16 \geqslant 0$ или $z(z-2) \geqslant 0$.

Следовательно, для определения z имеем систему неравенств

$$\begin{cases} z \geqslant 0, \\ -2 \leqslant z \leqslant 2, \\ z(z-2) \geqslant 0, \end{cases}$$

решением которой являются $z_1 = 0$ и $z_2 = 2$.

Пусть $z_1 = 0$, тогда система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ 4y^2 = 8y, \\ -x(x+3) = 5x + 16, \end{cases}$$

корнями которой являются $x_1 = -4$ и $y_1 = 2$.

Пусть $z_2 = 2$, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ 4y^2 + 4 = 8y, \\ (x+3)(4 - x) = 5x + 16, \end{cases}$$

решая которую получаем $x_2 = -2$ и $y_2 = 1$.

Таким образом, заданная система уравнений имеет следующие корни: $x_1 = -4$, $y_1 = 2$, $z_1 = 0$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 1$, $z_2 = 2$.

167. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=3, \\ x+y+z=3, \end{cases}$ где $x>0,\ y>0,\ z>0.$

Решение. Если сложить первые два уравнения системы, то получим уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=6. \qquad (*)$$

Так как $x>0$, $y>0$, $z>0$, то согласно неравенству Коши (3) можно утверждать, что $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$, $\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\geqslant 2$ и $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\geqslant 2$.

Отсюда следует, что $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\geqslant 6$. Если данное неравенство сравнить с уравнением $(*)$, то делаем вывод о том, что все примененные выше неравенства Коши (3) обращаются в равенства, а это возможно только в том случае, когда $x=y=z$.

В таком случае из третьего уравнения системы получаем $3x=3$ или $x_1=1$. Следовательно, $y_1=1$ и $z_1=1$. После подстановки полученных значений переменных x, y, z в уравнения системы убеждаемся в том, что $x_1=1$, $y_1=1$ и $z_1=1$ являются ее корнями.

168. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1, \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1. \end{cases}$

Решение. Областью допустимых значений переменных x, y в системе уравнений являются $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$.

Так как $y\geqslant 0$, то $y+1\geqslant 1$ и $\sqrt{y+1}\geqslant 1$. С учетом того, что $\sqrt{x}\geqslant 0$, получаем неравенство $\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\geqslant 1$. Если полученное неравенство сравнить с первым уравнением системы, то $\sqrt{x}=0$ и $\sqrt{y+1}=1$. Отсюда следует, что $x_1=0$ и $y_1=0$. Непосредственной подстановкой во второе уравнение системы убеждаемся в том, что $x_1=0$, $y_1=0$ являются корнями заданной системы уравнений.

169. $\begin{cases} x^2+2y^2+3z^2=4, \\ x^4+y^4+z^4=1. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся неравенством Коши—Буняковского (9), тогда

$$(x^2+2y^2+3z^2)^2\leqslant(1^2+2^2+3^2)(x^4+y^4+z^4)=14(x^4+y^4+z^4).$$

Так как по условию

$$x^4+y^4+z^4=1, \quad \text{то} \quad x^2+2y^2+3z^2\leqslant\sqrt{14}.$$

Однако по условию $x^2+2y^2+3z^2=4$, т. е. $x^2+2y^2+3z^2>\sqrt{14}$. Поэтому заданная система уравнений корней не имеет.

170. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+2y+2z=3. \end{cases}$

Решение. Используя неравенство Коши—Буняковского (9) и первое уравнение системы, получаем

$$(x+2y+2z)^2\leqslant(1^2+2^2+2^2)(x^2+y^2+z^2)=9.$$

Отсюда следует, что $x+2y+2z\leqslant 3$. Так как по условию $x+2y+2z=3$, то примененное выше неравенство Коши—Буняковского превратилось в равенство. А этот факт означает, что существует константа a такая, что $x=a$, $y=2a$ и $z=2a$. Тогда второе уравнение системы $x+2y+2z=3$ принимает вид $a+2(2a)+2(2a)=3$, из которого следует, что $a=\dfrac{1}{3}$. Тогда $x_1=\dfrac{1}{3}$ и $y_1=z_1=\dfrac{2}{3}$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что найденные значения переменных x, y, z являются корнями заданной системы уравнений.

171. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5=x_1x_2x_3x_4, \end{cases}$

где $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, $x_3\geqslant 0$, $x_4\geqslant 0$.

Решение. Используя неравенство Коши (1) при $n=5$ и тот факт, что $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, имеем

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5=$$

$$=x_1x_2x_3x_4=x_1x_2x_3x_4\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)=$$
$$=x_1x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_3x_4+x_1x_2x_3x_4x_4\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{5}\left(x_1^5+x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5\right)+\frac{1}{5}\left(x_1^5+x_2^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5\right)+$$
$$+\frac{1}{5}\left(x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_3^5+x_4^5\right)+\frac{1}{5}\left(x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_4^5\right)=$$
$$=x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5.$$

Отсюда следует, что примененные выше неравенства Коши превратились в равенства, а это возможно лишь в том случае, когда $x_1=x_2=x_3=x_4$. Отсюда и из первого уравнения системы получаем $x_1=x_2=x_3=x_4=\dfrac{1}{4}$.

172. $\begin{cases} x^2=y-1, \\ y^2=z-1, \\ z^2=x-1. \end{cases}$

Решение. Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x=z^2+1, \\ y=x^2+1, \\ z=y^2+1. \end{cases} \qquad (*)$$

Отсюда следует, что $x\geqslant 1$. Пусть $f(x)=x^2+1$, тогда из системы уравнений $(*)$ получаем $x=f(z)=f(f(y))=f(f(f(x)))$. Так как функция $f(x)=x^2+1$ является возрастающей при $x\geqslant 1$, то функциональное уравнение $f(f(f(x)))=x$ будет равносильно уравнению $f(x)=x$, т. е. равносильно уравнению $x^2+1=x$. Однако это уравнение корней не имеет, поэтому заданная система уравнений является несовместной.

Примечание. При решении систем уравнений 172–174 используется следующее утверждение: если функция $y=f(x)$ является возрастающей на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, то уравнение $\underbrace{f(f(\ldots(f(x))\ldots))}_{n\text{ раз}}=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$ на рассматриваемом отрезке $a\leqslant x\leqslant b$.

173. $\begin{cases} x-\sqrt{y}=1, \\ y-\sqrt{z}=1, \\ z-\sqrt{x}=1. \end{cases}$

Решение. Перепишем систему уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} x=\sqrt{y}+1, \\ y=\sqrt{z}+1, \\ z=\sqrt{x}+1. \end{cases} \qquad (*)$$

Очевидно, что $x\geqslant 1$. Введем в рассмотрение функцию $f(x)=\sqrt{x}+1$, областью определения которой являются $x\geqslant 0$. Очевидно, что здесь $x=f(y)=f(f(z)t)=f(f(f(x)))$, т. е. имеет место уравнение $x=f(f(f(x)))$.

Так как функция $f(x)=\sqrt{x}+1$ является возрастающей на области ее определения, то уравнение $x=f\big(f\big(f(x)\big)\big)$ равносильно уравнению $x=f(x)$ или $x=\sqrt{x}+1$.

После возведения в квадрат обеих частей уравнения $x-1=\sqrt{x}$ получаем квадратное уравнение $x^2-3x+1=0$, которое имеет два корни $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Так как $x\geqslant 1$, то подходящим является только первый корень этого уравнения. Проведя аналогичные рассуждения, получаем $y_1=z_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

174. $\begin{cases} 2^x+3^x=5^y, \\ 2^y+3^y=5^z, \\ 2^z+3^z=5^x. \end{cases}$

Решение. Перепишем систему уравнений как

$$\begin{cases} y=\log_5(2^x+3^x), \\ z=\log_5(2^y+3^y), \\ x=\log_5(2^z+3^z). \end{cases} \qquad (*)$$

Пусть $f(x)=\log_5(2^x+3^x)$. Тогда $y=f(x)$, $z=f(y)$, $x=f(z)$ и система уравнений $(*)$ принимает вид функционального уравнения $f\big(f\big(f(x)\big)\big)=x$.

Поскольку функция $y=f(x)$ является возрастающей на всей оси OX, то уравнение $f\big(f\big(f(x)\big)\big)=x$ равносильно уравнению

$f(x) = x$, т. е. $\log_5(2^x + 3^x) = x$ и $2^x + 3^x = 5^x$. Отсюда получаем $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$.

Очевидно, что корнем уравнения $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ является $x_1 = 1$. Причем этот корень единственный, так как в этом уравнении левая часть представляет собой непрерывную и убывающую функцию, а правая часть является константой.

Проведя аналогичные рассуждения, легко установить, что корнями заданной системы уравнений являются $x_1 = y_1 = z_1 = 1$.

175. $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \dfrac{y}{x}, \\ 2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^y. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения системы получаем $x > 0$ и $y > 0$. Далее, представим данное уравнение в виде равносильного уравнения

$$\sqrt{x} + \log_3 x = \sqrt{y} + \log_3 y. \qquad (*)$$

Положим $f(x) = \sqrt{x} + \log_3 x$, тогда уравнение $(*)$ принимает вид функционального уравнения $f(x) = f(y)$. Так как функция $y = f(x)$ является возрастающей для любых $x > 0$, то из уравнения $f(x) = f(y)$ следует $x = y$. В этой связи из второго уравнения системы получаем $2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^x$. Если положить $z = 2^x$, то имеем кубическое уравнение $z^3 - 5 \cdot z^2 + 4z = 0$, корнями которого являются $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ и $z_3 = 4$.

Так как $z = 2^x$ и $x > 0$, то $z > 1$. Поэтому $2^x = 4$ и $x_1 = 2$. Поскольку $x = y$, то $y_1 = 2$.

176. $\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$

Решение. Областью допустимых значений переменных x, y в системе уравнений является множество всех пар действительных чисел, кроме пары $x = 0$ и $y = 0$.

Далее, первое и второе уравнения системы умножим на x и y, соответственно. После этого сложим полученные два уравнения и получим $2xy + \dfrac{(3x - y)y - (x + 3y)x}{x^2 + y^2} = 3y$ или $2xy - 1 = 3y$.

Так как $y \neq 0$, то $x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2y}$. Тогда перепишем второе уравнение системы как

$$y(x^2 + y^2) - x - 3y = 0,$$

$$y\left(\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2y}\right)^2 + y^2\right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2y}\right) - 3y = 0$$

или

$$4y^4 - 3y^2 - 1 = 0.$$

Отсюда получаем $y^2 = 1$ и $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Поскольку $x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2y}$, то $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$.

177. При каких значениях параметра a система уравнений

$\begin{cases} x - y = a(1 + xy), \\ xy + x + y + 2 = 0 \end{cases}$ имеет единственный корень?

Решение. Из второго уравнения системы получаем $y = \dfrac{-x - 2}{x + 1}$. Так как $x = -1$ не является корнем заданной системы уравнений (в этом легко убедиться подстановкой $x = -1$ во второе уравнение системы), то полагаем, что $x \neq -1$.

После подстановки выражения $y = \dfrac{-x - 2}{x + 1}$ в первое уравнение системы получаем квадратное уравнение относительно переменной x, т. е.

$$x^2(a + 1) + x(a + 2) + 2 - a = 0. \qquad (*)$$

Если уравнение $(*)$ имеет единственный корень (отличный от -1), то исходная система уравнений также будет иметь единственный корень. Для этого необходимо найти те значения a, при которых дискриминант уравнения $(*)$ обращается в 0. Так как $D = (a + 2)^2 - 4(a + 1)(2 - a) = 5a^2 - 4$, то необходимо рассмотреть уравнение $5a^2 - 4 = 0$, откуда получаем $a = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Также уравнение $(*)$ имеет единственный корень (а вместе с ним имеет единственный корень и заданная система уравнений) в том случае, когда уравнение $(*)$ является уравнением первой степени, а этот факт имеет место при $a = -1$.

И, наконец, система уравнений имеет единственный корень, когда уравнение $(*)$ хотя и имеет два корня, однако один из этих корней является «запрещенным» для заданной системы уравнений, т. е. $x = -1$.

Рассмотрим, при каких значениях параметра a уравнение $(*)$ имеет корень, равный -1. С этой целью подставим значение $x = -1$ в уравнение $(*)$ и вычислим значение параметра a. Итак, имеет место

$$1 \cdot (a+1) - 1 \cdot (a+2) + 2 - a = 0,$$
$$a + 1 - a - 2 + 2 - a = 0, \quad \text{или} \quad a = 1.$$

Следовательно, заданная система уравнений имеет ровно один корень, если $a = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и $a = \pm 1$.

178. При каких значениях параметров a, b система уравнений

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad \text{имеет единственный корень?}$$

Решение. Поскольку переменные x, y входят в систему уравнений симметрично и, кроме того, система не изменится, если в ней заменить переменные x, y соответственно на $-x$, $-y$, то единственный корень системы уравнений необходимо искать в виде $(0, 0, u)$.

Подставим $x = y = 0$ и $z = u$ в систему уравнений, тогда получим $a = b = u$ и $z = \pm 2$. Следовательно, для того, чтобы система уравнений $(*)$ имела бы единственный корень, необходимо положить $a = b = 2$ и $a = b = -2$.

Пусть $a = b = 2$, тогда система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} xyz + z = 2, \\ xyz^2 + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases} \qquad (*)$$

Однако система уравнений $(*)$ имеет следующие пять троек корней:

$$(0; 0; 2), \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right), \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}; 1\right),$$
$$\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right) \quad \text{и} \quad \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}; -\frac{\sqrt{5}+1}{2}; 1\right).$$

Пусть теперь $a = b = -2$, тогда заданная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases} \qquad (**)$$

Так как система уравнений $(**)$ имеет единственный корень $x_1 = y_1 = 0$ и $z_1 = -2$, то можно делать вывод о том, что заданная система уравнений имеет единственный корень только при $a = b = -2$.

§ 2.10. Решение неравенств

179. $\sqrt{1-x} > 2x + 8$.

Решение. Рассмотрим три способа решения неравенства.

Способ 1. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве являются $x \leqslant 1$. Левая часть неравенства неотрицательна, поэтому заданное неравенство будет обязательно выполняться при таких значениях x (из области допустимых значений), при которых правая часть строго меньше нуля. С этой целью рассмотрим неравенство $2x + 8 < 0$, из которого следует, что неравенство $x < -4$ определяет множество решений заданного неравенства.

Пусть теперь $-4 \leqslant x \leqslant 1$. Возведем обе части неравенства в квадрат, тогда

$$1 - x > (2x+8)^2,$$
$$4x^2 + 33x + 63 < 0 \quad \text{или}$$
$$-5\frac{1}{4} < x < -3.$$

Так как $-4 \leqslant x \leqslant 1$, то решением неравенства являются $-4 \leqslant x < -3$.

Следовательно, неравенство $\sqrt{1-x} > 2x+8$ выполняется для любых $x < -3$.

Способ 2. Представим заданное неравенство в виде

$$\sqrt{1-x} > -2(1-x)+10. \qquad (*)$$

Если обозначить $\sqrt{1-x} = y$, то неравенство $(*)$ принимает вид $y > -2y^2+10$ или $2y^2+y-10 > 0$, где $y \geqslant 0$. Решая квадратное неравенство с учетом того, что $y \geqslant 0$, получаем $y > 2$.

Так как $\sqrt{1-x} = y$, то $\sqrt{1-x} > 2$ или $x < -3$.

Способ 3. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{1-x} = 2x+8 \qquad (*)$$

и подбором установим, что $x_1 = -3$ является его корнем.

Обозначим $f(x) = \sqrt{1-x}$ и $g(x) = 2x+8$. Первая функция непрерывно убывает (при условии, что $x \leqslant 1$), а вторая функция — непрерывно возрастает на всей числовой оси OX. В этой связи $x_1 = -3$ будет единственным корнем уравнения $(*)$.

Кроме того, если $x < -3$, то $f(x) > f(-3)$ и $g(x) < g(-3)$. Так как $f(-3) = g(-3)$, то искомое неравенство $f(x) > g(x)$ выполняется для любых $x < -3$.

Примечание. Первый способ решения подобных неравенств является более универсальным по сравнению с применением остальных способов.

180. $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве являются $-3 \leqslant x \leqslant 9$. Так как $\sqrt{x+3} \geqslant 0$ и $\sqrt[4]{9-x} \geqslant 0$, то из заданного неравенства следует, что $\sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$ и $\sqrt{x+3} < \sqrt{3}$. Из первого неравенства получаем $x > 0$, а из второго следует, что $x < 0$. Таким образом, получили два противоречивых условия, а это означает, что заданное неравенство решения не имеет.

181. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$.

Решение. Поскольку $1-4x^2 \geqslant 0$ и $x \neq 0$, то областью допустимых значений переменной x в неравенстве являются $0 < |x| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

В левой части неравенства умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $1+\sqrt{1-4x^2}$, которое принимает только положительные значения, и получим неравенство

$$\frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}} < 3. \qquad (*)$$

Поскольку $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$, то числитель дроби в неравенстве $(*)$ не превосходит 2, а знаменатель при этом не меньше 1. Поэтому неравенство $(*)$ имеет место на всей из области допустимых значений переменной x в заданном неравенстве.

Следовательно, решением неравенства являются произвольные значения x, удовлетворяющие двойному неравенству $0 < |x| \leqslant \dfrac{1}{2}$, т. е. $-\dfrac{1}{2} \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

182. $\sqrt[3]{2-x} - \sqrt{4-x} < 3$.

Решение. Область допустимых значений переменной x в неравенстве определяется, как $x \leqslant 4$. Приведем неравенство к равносильному виду $\sqrt[3]{2-x} < \sqrt{4-x}+3$, а затем обе его части возведем в куб. Тогда

$$2-x < (4-x)\sqrt{4-x} + 9(4-x) + 27\sqrt{4-x} + 27.$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{4-x} > \frac{8x-61}{31-x}. \qquad (*)$$

Так как $x \leqslant 4$, то правая часть неравенства $(*)$ строго меньше нуля. Если при этом учесть, что $\sqrt{4-x} \geqslant 0$, то неравенство $(*)$ справедливо для любых x из области допустимых значений.

Итак, решением заданного неравенства являются $x \leqslant 4$.

183. $\sqrt{1-x} - \sqrt{1+\sqrt{x+2}-x} < 4$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве являются $-2 \leqslant x \leqslant 1$. Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{1-x} < \sqrt{1+\sqrt{x+2}-x} + 4.$$

Возведем в квадрат обе части неравенства, тогда

$$1 - x < 1 + \sqrt{x+2} - x + 8\sqrt{1 + \sqrt{x+2} - x} + 16,$$
$$\sqrt{x+2} + 8\sqrt{1 + \sqrt{x+2} - x} + 16 > 0.$$

Так как левая часть полученного неравенства строго больше нуля для любого x из области допустимых значений, то решением заданного неравенства являются $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

184. $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{2}} + \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{2}} \geqslant x.$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве являются $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Поскольку неравенство выполняется при $x = 0$ (в этом нетрудно убедиться, подставляя $x = 0$ в искомое неравенство), то будем рассматривать случай, когда $0 < |x| \leqslant 2$.

Перепишем неравенство в равносильном виде

$$x \leqslant \left(1 + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^{1/2}. \qquad (*)$$

Если $0 < |x| \leqslant 2$, то $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2} < 1$. В этой связи к правой части неравенства $(*)$ можно применить неравенство Бернулли (8). Тогда

$$\left(1+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^{1/2} + \left(1-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^{1/2} \leqslant 1+\frac{\sqrt{4-x^2}}{4}+1-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4}=2.$$

Отсюда и из неравенства $(*)$ получаем $x \leqslant 2$. Следовательно, неравенство выполняется на всей области допустимых значений переменной x, т. е. решением заданного неравенства являются $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

185. $\dfrac{7}{|x-1|-3} \geqslant |x+2|.$

Решение. Так как правая часть неравенства больше или равна 0, то такой должна быть и левая его часть, а это означает, что $|x-1| - 3 > 0$ или $|x-1| > 3$, т. е. $x < -2$ и $x > 4$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x < -2$, тогда $|x-1| = 1-x$ и $|x+2| = -x-2$. В таком случае заданное неравенство принимает вид
$$\frac{7}{-x-2} \geqslant -x-2,$$
где $-x-2 > 0$. Отсюда получаем квадратное неравенство
$$x^2 + 4x - 3 \leqslant 0 \quad \text{и} \quad -2-\sqrt{7} \leqslant x \leqslant -2+\sqrt{7}.$$
Так как рассматривается случай $x < -2$, то решением заданного неравенства являются $-2-\sqrt{7} \leqslant x < -2$.
2) Пусть $x > 4$. В таком случае $|x-1| = x-1$, $|x+2| = x+2$ и имеет место неравенство $\dfrac{7}{x-4} \geqslant x+2$, где $x-4 > 0$. Отсюда следует квадратное неравенство $x^2 - 2x - 15 \leqslant 0$, решая которое получаем $-3 \leqslant x \leqslant 5$. Так как $x > 4$, то решением заданного неравенства являются также $4 < x \leqslant 5$.

186. $x + y^2 + \sqrt{x-y^2-1} \leqslant 1.$

Решение. Поскольку выражение под знаком квадратного корня не может быть отрицательным, то $x - y^2 - 1 \geqslant 0$ или $x \geqslant y^2+1$, т. е. $x \geqslant 1$.

Так как $x \geqslant 1$, $y^2 \geqslant 0$ и $\sqrt{x-y^2-1} \geqslant 0$, то
$$x + y^2 + \sqrt{x-y^2-1} \geqslant 1 + y^2 + \sqrt{x-y^2-1} \geqslant 1.$$

Отсюда и из заданного неравенства получаем уравнение
$$x + y^2 + \sqrt{x-y^2-1} = 1. \qquad (*)$$

Однако равенство в уравнении $(*)$ достигается только в том случае, когда $x_1 = 1$ и $y_1 = 0$.

Примечание. Данное неравенство можно решить несколько иначе. Для этого перепишем неравенство в равносильном виде
$$\sqrt{x-y^2-1} \leqslant 1 - x - y^2.$$
Отсюда, используя свойства квадратного корня, получаем систему неравенств
$$\begin{cases} x - y^2 - 1 \geqslant 0, \\ 1 - x - y^2 \geqslant 0, \end{cases}$$
решением которой являются $x_1 = 1$ и $y_1 = 0$.

§ 2.11. Показательные и логарифмические уравнения

187. $6^x - 2^x = 32$.

Решение. Попытки найти корень уравнения обычными методами здесь ничего не дадут. В то же время нетрудно заметить, что $x_1 = 2$ удовлетворяет уравнению. Покажем, что других корней нет. Для этого обе части уравнения разделим на 2^x, тогда $3^x - 1 = \dfrac{32}{2^x}$.

Левая часть полученного уравнения является непрерывной и возрастающей на всей числовой оси OX функцией, а правая часть — непрерывной и убывающей функцией. Поэтому это уравнение имеет не более одного корня.

Следовательно, заданное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 2$.

188. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$.

Решение. Представим уравнение в равносильном виде

$$(3^x)^2 + (2^x)(3^x) - 2(2^x)^2 = 0.$$

Затем обе части уравнения разделим на $(2^x)^2$ и обозначим $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = y$. Тогда получим квадратное уравнение $y^2 + y - 2 = 0$, корнями которого являются $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$. Так как $y > 0$, то $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 1$ и $x_1 = 0$.

189. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Решение. Нетрудно видеть, что $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 1$. Поэтому, если обозначить первое слагаемое через y, то второе слагаемое будет равно $\dfrac{1}{y}$. В этой связи заданное уравнение принимает вид $y + \dfrac{1}{y} = 4$.

Корнями уравнения $y^2 - 4y + 1 = 0$ будут $y_1 = 2 + \sqrt{3}$ и $y_2 = 2 - \sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1}$.

Так как $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = y$, то рассмотрим два уравнения $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}$ и $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$. Из первого уравнения получаем $x_1 = 2$, а из второго уравнения $x_2 = -2$.

190. $(26 + 15\sqrt{3}\,)^x - 5(7 + 4\sqrt{3}\,)^x + 6(2 + \sqrt{3}\,)^x + (2 - \sqrt{3}\,)^x = 5$.

Решение. Обозначим $(2+\sqrt{3})^x = y$, тогда

$$(26 + 15\sqrt{3})^x = y^3, \quad (7 + 4\sqrt{3})^x = y^2, \quad (2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{y}$$

и уравнение принимает вид

$$y^4 - 5y^3 + 6y^2 - 5y + 1 = 0. \tag{$*$}$$

Поскольку $y \neq 0$, то разделим обе части уравнения $(*)$ на y^2 и обозначим $y + \dfrac{1}{y} = z$, тогда получим

$$y^2 - 5y + 6 - \frac{5}{y} + \frac{1}{y^2} = 0, \quad \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 5\left(y + \frac{1}{y}\right) + 6 = 0,$$
$$(z^2 - 2) - 5z + 6 = 0, \quad \text{или} \quad z^2 - 5z + 4 = 0.$$

Корнями квадратного уравнения $z^2 - 5z + 4 = 0$ являются $z_1 = 1$ и $z_2 = 4$. Поскольку $z = y + \dfrac{1}{y}$ и $y > 0$, то согласно неравенству Коши (3) имеем $z \geqslant 2$. Поэтому $z = 4$, $y + \dfrac{1}{y} = 4$ или $y^2 - 4y + 1 = 0$. Отсюда получаем

$$y_1 = 2 + \sqrt{3} \quad \text{и} \quad y_2 = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Так как $y = (2+\sqrt{3})^x$, то $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

191. $4^x - (7 - x)2^x + 12 - 4x = 0$.

Решение. Рассмотрим заданное уравнение в виде квадратного уравнения относительно 2^x. Тогда корнями этого уравнения являются

$$(2^x)_{1,2} = \frac{7-x \pm \sqrt{(7-x)^2 - 4(12-4x)}}{2} = $$
$$= \frac{7-x\pm\sqrt{x^2+2x+1}}{2} =$$
$$= \frac{7-x\pm|x+1|}{2} = \frac{7-x\pm(x+1)}{2}.$$

Отсюда получаем

$$2^x = \frac{7-x+(x+1)}{2} = 4 \quad \text{и}$$
$$2^x = \frac{7-x-(x+1)}{2} = 3-x.$$

Корнем уравнения $2^x = 4$ является $x_1 = 2$. Уравнение

$$2^x = 3-x$$

имеет не более одного корня, поскольку его левая часть представляет собой непрерывную и возрастающую функцию, а правая часть — непрерывную и убывающую функцию на всей числовой оси OX. Этот корень $x_2 = 1$ можно легко найти подбором.

192. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{6}\right)^x - \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^x = 1.$

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^x - \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 = 0,$$
$$\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\right) = 0,$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + 1\right) +$$
$$+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x - 1\right) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x - 1\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + \quad +1+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^x\right) = 0. \quad (*)$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + 1 + \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$, то из уравнения $(*)$ получаем $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x - 1 = 0$, которое равносильно уравнению $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$. Отсюда следует, что $x_1 = -1$.

193. $x2^{1/x} + \frac{1}{x}2^x = 4.$

Решение. Поскольку правая часть уравнения больше 0, то $x > 0$. Оценим снизу левую часть уравнения, используя для этого неравенства Коши (2) и (3), следующим образом:

$$x2^{1/x} + \frac{1}{x}2^x \geqslant 2\sqrt{\left(x2^{1/x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}2^x\right)} = 2\sqrt{2^{x+1/x}} \geqslant 2\sqrt{2^2} = 4.$$

Отсюда и из заданного уравнения следует, что примененные выше неравенства Коши обращаются в равенства, а это означает, что имеет место система уравнений

$$\begin{cases} x2^{1/x} = 1/x2^x, \\ x + \dfrac{1}{x} = 2, \end{cases}$$

которая имеет единственный корень $x_1 = 1$. Подставляя значение $x_1 = 1$ в заданное уравнение, убеждаемся в том, что найденное значение x является его корнем.

194. $2^{1-|x|} - 1 = x^2 + \frac{1}{x^2+1}.$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2^{1-|x|} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1}. \qquad (*)$$

Так как $|x| \geqslant 0$, то для левой части уравнения $(*)$ имеет место верхняя оценка $2^{1-|x|} \leqslant 2^1 = 2$. Правую часть этого уравнения оценим снизу, используя неравенство Коши (3), т. е.

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} \geqslant 2.$$

Отсюда следует, что равенство в уравнении $(*)$ имеет место только в том случае, когда обе его части равны 2.

Следовательно, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{1-|x|} = 2, \\ x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2+1} = 2, \end{cases}$$

которая имеет единственный корень $x_1 = 0$.

195. $\dfrac{x}{14} = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{\log_x 4}$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x > 0$ и $x \neq 1$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию x, тогда

$$\log_x x - \log_x 14 = \log_x 4 \cdot \log_x \frac{2}{7},$$

$$1 - \log_x 2 - \log_x 7 = 2\log_x 2 \cdot (\log_x 2 - \log_x 7). \qquad (*)$$

Обозначим $\log_x 2 = a$ и $\log_x 7 = b$. В таком случае уравнение $(*)$ можно переписать, как $1 - a - b = 2a(a-b)$ или $2a^2 - a(2b-1) + b - 1 = 0$.

Решая квадратное уравнение относительно переменной a, получаем

$$a_{1,2} = \frac{2b - 1 \pm \sqrt{(2b-1)^2 - 8(b-1)}}{4} = \frac{2b - 1 \pm (2b-3)}{4}.$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $a = \dfrac{2b - 1 + 2b - 3}{4} = b - 1$, то $\log_x 2 = \log_x 7 - 1$, $\log_x \dfrac{7}{2} = 1$ или $x_1 = \dfrac{7}{2}$.

2) Если $a = \dfrac{2b - 1 - 2b + 3}{4} = \dfrac{1}{2}$, то $\log_x 2 = \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{x} = 2$ или $x_2 = 4$.

196. $x^{\sqrt{\log_x 5}} + 5^{\sqrt{\log_5 x}} = 2\sqrt{5}$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x > 1$. Используя свойства логарифмов, преобразуем первое слагаемое в левой части уравнения следующим образом:

$$x^{\sqrt{\log_x 5}} = x^{\log_x 5/\sqrt{\log_x 5}} = x^{\log_x 5 \cdot \sqrt{\log_5 x}} = (x^{\log_x 5})^{\sqrt{\log_5 x}} = 5^{\sqrt{\log_5 x}}.$$

Отсюда следует, что заданное уравнение равносильно уравнению $5^{\sqrt{\log_5 x}} = \sqrt{5}$, из которого получаем $\sqrt{\log_5 x} = \dfrac{1}{2}$, $\log_5 x = \dfrac{1}{4}$ и $x_1 = \sqrt[4]{5}$.

Примечание. При решении приведенного выше уравнения было использовано одно интересное свойство логарифмов, которое полезно знать старшеклассникам.

Если $a > 1$ и $b > 1$, то $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$. Для доказательства данного равенства прологарифмируем по основанию b обе его части. Тогда $\sqrt{\log_a b} \cdot \log_b a = \sqrt{\log_b a}$. Так как $\sqrt{\log_a b} = \dfrac{1}{\sqrt{\log_b a}}$, то

$$\sqrt{\log_a b} \cdot \log_b a = \frac{1}{\sqrt{\log_b a}} \cdot \log_b a = \sqrt{\log_b a}.$$

197. $4^{\lg x} - 32 + x^{\lg 4} = 0$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x > 0$ и $x \neq 1$.

Согласно формуле (17) имеем $4^{\lg x} = x^{\lg 4}$. В таком случае заданное уравнение принимает вид $4^{\lg x} - 32 + 4^{\lg x} = 0$ или $4^{\lg x} = 16$. Отсюда следует, что $\lg x = 2$ или $x_1 = 100$.

198. $4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x + 5)^{\log_3 2}$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x < 1$. В соответствии с формулой (17) уравнение можно переписать как

$$4^{\log_3(1-x)} = 2^{\log_3(2x^2+2x+5)} \quad \text{или} \quad 2^{2\log_3(1-x)} = 2^{\log_3(2x^2+2x+5)}.$$

Отсюда получаем

$$2\log_3(1-x)=\log_3(2x^2+2x+5),$$
$$(1-x)^2=2x^2+2x+5,$$
$$x^2-2x+1=2x^2+2x+5,$$
$$x^2+4x+4=0 \quad \text{или} \quad (x+2)^2=0.$$

Отсюда следует, что корнем заданного уравнения является $x_1=-2$.

199. $3\lg x^2-\lg^2(-x)=9$.

Решение. Область допустимых значений переменной x в уравнении определяется неравенством $x<0$. Принимая во внимание формулу логарифмирования (16), заданное уравнение можно переписать как $6\lg|x|-\lg^2(-x)=9$. Отсюда с учетом того, что $x<0$, получаем $6\lg(-x)-\lg^2(-x)=9$, $(\lg(-x)-3)^2=0$, $\lg(-x)=3$ или $x_1=-1000$.

200. $\lg(x+10)+\frac{1}{2}\lg x^2=2-\lg 4$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x>-10$, где $x\neq 0$.

Поскольку $\frac{\lg x^2}{2}=\lg|x|$, то заданное уравнение равносильно уравнению $\lg(x+10)+\lg|x|+\lg 4=2$.

Используя свойства логарифмов, получаем

$$\lg(4|x|\cdot(x+10))=2 \quad \text{или}$$
$$4|x|\cdot(x+10)=100. \qquad (*)$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x>0$, тогда $|x|=x$ и уравнение $(*)$ принимает вид $4x(x+10)=100$ или $x^2+10x-25=0$. Отсюда следует

$$x_{1,2}=-5\pm 5\sqrt{2}.$$

Так как $x>0$, то корнем заданного уравнения будет

$$x_1=5\sqrt{2}-5.$$

2) Пусть $-10<x<0$, тогда $|x|=-x$ и из уравнения $(*)$ получаем $-4x(x+10)=100$ или $x^2+10x+25=0$, т. е. $(x+5)^2=0$ и $x_2=-5$.

201. $\log_2\left(1+\sqrt{x^4+x^2}\right)+\log_2(1+2x^2)=0$.

Решение. Так как $\sqrt{x^4+x^2}\geqslant 0$ и $x^2\geqslant 0$, то для любых x справедливы неравенства $1+\sqrt{x^4+x^2}\geqslant 1$ и $1+2x^2\geqslant 1$. В таком случае $\log_2\left(1+\sqrt{x^4+x^2}\right)\geqslant 0$ и $\log_2(1+2x^2)\geqslant 0$.

Следовательно, имеет место неравенство

$$\log_2\left(1+\sqrt{x^4+x^2}\right)+\log_2(1+2x^2)\geqslant 0.$$

Отсюда и из заданного уравнения получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2\left(1+\sqrt{x^4+x^2}\right)=0,\\ \log_2(1+2x^2)=0,\end{cases}$$

которая имеет единственный корень $x_1=0$.

202. $\left|\log_2(2x+7)\right|=\log_2\left(1+|x+3|\right)+\log_2\left(1-|x+3|\right)$.

Решение. Для определения области допустимых значений переменной x в уравнении рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases}2x+7>0,\\ 1-|x+3|>0.\end{cases}$$

Отсюда получаем $-7/2<x<-2$.

С одной стороны, левая часть уравнения больше или равна 0. С другой стороны, его правую часть можно оценить, как

$$\log_2\left(1+|x+3|\right)+\log_2\left(1-|x+3|\right)=\log_2(1-(x+3)^2)\leqslant\log_2 1=0.$$

Следовательно, равенство в заданном уравнении может быть только в том случае, когда обе его части равны 0. Следовательно, имеет место система уравнений

$$\begin{cases}\log_2(2x+7)=0,\\ \log_2(1-(x+3)^2)=0,\end{cases}$$

корнем которой является $x_1=-3$.

Подстановкой найденного значения x в заданное уравнение убеждаемся в том, что $x_1=-3$ является его корнем.

203. $\log_{\sqrt{x}}\big(x+|x-2|\big)=\log_x\big(5x-6+5|x-2|\big).$

Решение. Из условия следует, что областью допустимых значений переменной x в уравнении является $x>0$ и $x\neq 1$.

Пусть $y=x+|x-2|$. Тогда уравнение принимает вид

$$\log_{\sqrt{x}} y=\log_x(5y-6)\quad \text{или}\quad \log_x y^2=\log_x(5y-6),$$

где $y>6/5$. Отсюда получаем квадратное уравнение $y^2-5y+6=0$, корнями которого являются $y_1=2$ и $y_2=3$.

Так как $y=x+|x-2|$, то необходимо рассмотреть два случая.

1) Пусть $x+|x-2|=2$. Если $0<x<1$ или $1<x<2$, тогда $|x-2|=-x+2$ и уравнение принимает вид очевидного тождества. Если $x\geqslant 2$, то $|x-2|=x-2$ и получаем уравнение $x+(x-2)=2$, которое имеет корень $x_1=2$.
2) Пусть $x+|x-2|=3$. Нетрудно видеть, что данное уравнение имеет единственный корень $x_2=\dfrac{5}{2}$.

Следовательно, корнями заданного уравнения являются произвольные значения x из интервалов $0<x<1$ и $1<x\leqslant 2$, а также $x_2=\dfrac{5}{2}$.

204. $\log_2^2 x+(x-1)\cdot\log_2 x+2x-6=0.$

Решение. Так как уравнение является квадратным относительно $\log_2 x$, то

$$(\log_2 x)_{1,2}=\frac{-x+1\pm\sqrt{(x-1)^2-4(2x-6)}}{2}=$$
$$=\frac{-x+1\pm\sqrt{x^2-10x+25}}{2}=\frac{-x+1\pm(x-5)}{2}.$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $\log_2 x=\dfrac{-x+1+x-5}{2}=-2$, то $x_1=\dfrac{1}{4}$.
2) Если $\log_2 x=\dfrac{-x+1-x+5}{2}=3-x$, то имеем уравнение

$$\log_2 x=3-x. \qquad (*)$$

Поскольку функция $y=\log_2 x$ на области определения является непрерывной и возрастающей, а функция $y=3-x$ непрерывно убывает на всей числовой оси OX, то уравнение $(*)$ не может иметь более одного корня. Другими словами, если уравнение $(*)$ имеет корень, то этот корень единственный. Этот единственный корень $x=2$ легко найти подбором.

Следовательно, заданное уравнение имеет два корня

$$x_1=\frac{1}{4}\quad \text{и}\quad x_2=2.$$

205. $\log_{x^2}(x^2+12)-\log_{-x}\sqrt{2-x}=1.$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $x<0$, где $x\neq -1$.

Учитывая свойства логарифмов и тот факт, что $x<0$, преобразуем уравнение следующим образом:

$$\log_{|x|}(x^2+12)-\log_{-x}(2-x)=2,$$
$$\log_{-x}(x^2+12)-\log_{-x}(2-x)=2,$$
$$\log_{-x}\frac{x^2+12}{2-x}=2$$
$$\frac{x^2+12}{2-x}=x^2$$

или

$$x^3-x^2+12=0.$$

Поскольку $x^3-x^2+12=(x+2)(x^2-3x+6)$ и $x^2-3x+6>0$ (дискриминант уравнения $x^2-3x+6=0$ отрицательный), то $x+2=0$ и $x_1=-2$.

206. $\dfrac{2-4\cdot\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)}-1=\dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}.$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении являются $-2<x<8$ и $x\neq -1$.

Первоначально отметим, что $2-4\cdot\log_{12}2=\log_{12}9$.

Далее, воспользуемся несложным равенством

$$\frac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)}=\frac{\log_b f(x)}{\log_b g(x)},$$

которое выполняется для любых положительных a и b, где $a \neq 1$ и $b \neq 1$.

Тогда заданное уравнение перепишем как

$$\frac{\log_{12} 9}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \frac{\log_{12}(8-x)}{\log_{12}(x+2)},$$

$$\log_{12} 9 - \log_{12}(x+2) = \log_{12}(8-x),$$

$$(x+2)(8-x) = 9 \quad \text{или} \quad x^2 - 6x - 7 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет два корня $x_1 = 7$ и $x_2 = -1$. Так как $-2 < x < 8$ и $x \neq -1$, то $x_1 = 7$ является единственным корнем заданного уравнения.

207. Решить в целых числах уравнение $x = \lg(9x+1)$.

Решение. Очевидно, что уравнение отрицательных корней не имеет, а $x_1 = 0$ является его корнем. Поэтому в дальнейшем будем искать только целые положительные корни. С этой целью перепишем заданное уравнение в виде

$$10^x = 1 + 9x \quad \text{или} (1+9)^x = 1 + 9x.$$

Принимая во внимание неравенство Бернулли (6) при любом натуральном n вида $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, в котором знак равенства достигается лишь при $n = 1$, делаем вывод о том, что уравнение $(1+9)^x = 1+9x$ имеет единственный целый положительный корень $x_2 = 1$. Итак, целыми корнями заданного уравнения являются $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

§ 2.12. Показательные и логарифмические неравенства

208. $1 + 9^x + 16^x \leqslant 3^x + 4^x + 12^x$.

Решение. Если обозначить $3^x = a$ и $4^x = b$, то требуемое неравенство принимает вид

$$1 + a^2 + b^2 \leqslant a + b + ab \quad \text{или} \quad a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \leqslant 0.$$

Обе части последнего неравенства умножим на 2, а затем в левой его части выделим полные квадраты, т. е.

$$2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a - 2b + 2 \leqslant 0,$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \leqslant 0$$

или

$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \leqslant 0. \qquad (*)$$

Так как $(a-b)^2 \geqslant 0$, $(a-1)^2 \geqslant 0$ и $(b-1)^2 \geqslant 0$, то из неравенства $(*)$ следует, что $a - b = 0$, $a - 1 = 0$ и $b - 1 = 0$. Отсюда получаем $a = 1$ и $b = 1$. Поскольку $a = 3^x$ и $b = 4^x$, то $x_1 = 0$ является единственным решением требуемого неравенства.

Примечание. При решении требуемого неравенства здесь была решена следующая самостоятельная задача: доказать, что для любых действительных x и y выполняется неравенство

$$x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \geqslant 0.$$

209. $\log_{1/2} x \geqslant 16^x$.

Решение. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\log_{1/2} x = 16^x, \qquad (*)$$

где $x > 0$. Пусть $f(x) = \log_{1/2} x$ и $g(x) = 16^x$. Известно, что функция $y = f(x)$ является непрерывной и убывающей на своей области определения, а функция $y = g(x)$ непрерывно возрастает на всей числовой оси OX. В этой связи, если уравнение $(*)$ имеет корень, то этот корень будет единственным. Подбором устанавливаем, что таким корнем является $x_1 = \dfrac{1}{4}$.

Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывная и убывающая, а функция $y = g(x)$ непрерывная и возрастающая, то для любых x из промежутка $0 < x \leqslant \dfrac{1}{4}$ имеет место цепочка неравенств

$$f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) \geqslant g(x).$$

Отсюда следует, что неравенство $f(x) \geqslant g(x)$ выполняется при $0 < x \leqslant \dfrac{1}{4}$.

210. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2(\log_{x-1} 9)\right) > 0$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве являются $1 < x < 2$ и $x > 2$.

Преобразуем заданное неравенство к равносильному виду

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2(\log_{x-1} 9)\right) > 0, \quad 0 < \log_2(\log_{x-1} 9) < 1,$$

$$1 < \log_{x-1} 9 < 2, \quad \frac{1}{2} < \log_{x-1} 3 < 1, \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{\log_3(x-1)} < 1.$$

Из неравенства $\frac{1}{2} < \frac{1}{\log_3(x-1)} < 1$ следует, что

$$1 < \log_3(x-1) < 2, \quad 3 < x-1 < 9 \quad \text{и} \quad 4 < x < 10.$$

Принимая во внимание область допустимых значений x, делаем вывод о том, что $4 < x < 10$ является решением заданного неравенства.

211. $x^{2\lg 2} \cdot 2^{-\lg x} \leqslant 2.$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве являются $x > 0$. Согласно формуле (17) можно записать, что $x^{\lg 2} = 2^{\lg x}$.

В таком случае неравенство принимает вид $(2^{\lg x})^2 \cdot 2^{-\lg x} \leqslant 2$ или $2^{\lg x} \leqslant 2$. Отсюда получаем, что $\lg x \leqslant 1$ или $x \leqslant 10$. Так как ранее было установлено, что $x > 0$, то решением заданного неравенства являются $0 < x \leqslant 10$.

212. $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(2 - |x-1|\right) > \log_{\sqrt{10}}(2x - x^2).$

Решение. Первоначально определим область допустимых значений переменной x в неравенстве. С этой целью рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} 2 - |x-1| > 0, \\ 2x - x^2 > 0, \end{cases}$$

из которой получаем $0 < x < 2$.

Поскольку $0 < x < 2$, то $-1 < x - 1 < 1$ или $|x-1| < 1$. Следовательно, на области допустимых значений x имеет место неравенство $2 - |x-1| > 1$. Если затем обе части данного неравенства прологарифмировать по основанию $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, то $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(2 - |x-1|\right) > 0$.

Далее, имеем $0 < 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 \leqslant 1$. Если учесть, что $\sqrt{10} > 1$, то получаем неравенство $\log_{\sqrt{10}}(2x - x^2) \leqslant 0$.

Итак, установлено, что

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(2 - |x-1|\right) > 0 \quad \text{и} \quad \log_{\sqrt{10}}(2x - x^2) \leqslant 0,$$

а это означает, что заданное неравенство выполняется на всей области допустимых значений x, т. е. его решением являются $0 < x < 2$.

213. Доказать, что для любых a, b $(0 < b < a)$ выполняется неравенство $\ln \frac{a}{b} > 2\frac{a-b}{a+b}$.

Решение. Поскольку $0 < b < a$, то $a = bk$, где $k > 1$. В таком случае требуемое неравенство можно переписать как

$$\ln \frac{bk}{b} > 2\frac{bk-b}{bk+b}, \quad \text{т. е.}$$

$$\ln k > 2\frac{k-1}{k+1}. \qquad (*)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x - 2\frac{x-1}{x+1}$, где $x > 1$. Очевидно, что $f(1) = 0$. Покажем, что функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $x > 1$.

Имеет место $f'_x = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$ при $x > 1$.

Следовательно, $f(x) > f(1) = 0$, т. е. $\ln x > 2\frac{x-1}{x+1}$. Таким образом, неравенство $(*)$ и требуемое неравенство справедливы.

214. Доказать, что $\log_{17} 19 > \log_{19} 20$.

Решение. Другими словами, требуется доказать, что $\frac{\log_{19} 20}{\log_{17} 19} < 1$ или $\log_{19} 20 \cdot \log_{19} 17 < 1$.

Используя неравенство Коши (2), можно записать

$$\log_{19} 20 \cdot \log_{19} 17 \leqslant \left(\frac{\log_{19} 20 + \log_{19} 17}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\log_{19} 340}{2}\right)^2 < \left(\frac{\log_{19} 361}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1.$$

Здесь учитывался тот факт, что функция $y = \log_{19} x$ является возрастающей при $x > 0$, поэтому $\log_{19} 340 < \log_{19} 361$.

215. Доказать, что $\lg(n+1) > \dfrac{\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n}{n}$.

Решение. Используя свойства логарифмов, можно показать, что требуемое неравенство равносильно неравенству $(n+1)^n > n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ и $n \geqslant 1$.

Имеет место система очевидных неравенств

$$n+1 > 1, \quad n+1 > 2, \quad n+1 > 3, \quad \ldots, n+1 > n.$$

Если перемножить между собой все приведенные выше неравенства, то получим неравенство $(n+1)^n > n!$.

216. Доказать, что $x_1^{\lg x_1} + x_2^{\lg x_2} + \ldots + x_n^{\lg x_n} \geqslant n$, где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_n > 0$ и $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$.

Решение. Левую часть требуемого нераве0нства прологарифмируем по основанию 10, а затем воспользуемся неравенствами Коши (1) и Коши—Буняковского (9), тогда

$$\lg\left(x_1^{\lg x_1} + x_2^{\lg x_2} + \ldots + x_n^{\lg x_n}\right) \geqslant \lg\left(n \cdot \sqrt[n]{x_1^{\lg x_1} \cdot x_2^{\lg x_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lg x_n} t}\right) =$$

$$= \lg n + \frac{1}{n} \cdot \left(\lg^2 x_1 + \lg^2 x_2 + \ldots + \lg^2 x_n\right) =$$

$$= \lg n + \frac{1}{n^2} \cdot \left(\underbrace{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}_{n}\right) \cdot \left(\lg^2 x_1 + \lg^2 x_2 + \ldots + \lg^2 x_n\right) \geqslant$$

$$\geqslant \lg n + \frac{1}{n^2}\left(1 \cdot \lg x_1 + 1 \cdot \lg x_2 + \ldots + 1 \cdot \lg x_n\right)^2 =$$

$$= \lg n + \frac{1}{n^2} \cdot \lg^2(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Так как по условию задачи имеем $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, то

$$\lg n + \frac{1}{n^2} \cdot \lg^2(x_1 x_2 \ldots x_n) = \lg n + \frac{1}{n^2} \lg^2 1 = \lg n + 0 = \lg n.$$

Из доказанного неравенства

$$\lg\left(x_1^{\lg x_1} + x_2^{\lg x_2} + \ldots + x_n^{\lg x_n}\right) \geqslant \lg n$$

следует справедливость требуемого неравенства.

§ 2.13. Показательные и логарифмические системы

217. $\begin{cases} (xy)^y \cdot x^{6x} = y^x, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$

Решение. Нетрудно видеть, что $x_1 = 1$ и $y_1 = 1$ является корнями системы уравнений.

Пусть теперь $x \neq 1$. Прологарифмируем по основанию x первое уравнение системы, тогда получим

$$y \log_x(xy) + 6x \log_x x = x \log_x y \quad \text{или}$$
$$y(1 + \log_x y) + 6x = x \log_x y. \qquad (*)$$

Если прологарифмировать и второе уравнение заданной системы, то $2 + \log_x y = 0$ или $\log_x y = -2$. В таком случае уравнение $(*)$ принимает вид $y = 8x$.

Так как $\log_x y = -2$, то $y = \dfrac{1}{x^2}$. Следовательно, $8x = \dfrac{1}{x^2}$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}$. Известно, что $y = 8x$. Тогда $y_2 = 4$.

Таким образом, корнями заданной системы уравнений являются $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = 4$.

218. $\begin{cases} y^{\log_5 x} = 64, \\ xy = 500. \end{cases}$

Решение. Из условия следует, что $x > 0$, $x \neq 1$ и $y > 0$.

Если оба уравнения системы прологарифмировать по основанию 2, то

$$\begin{cases} \log_5 x \cdot \log_2 y = 6, \\ \log_2 x + \log_2 y = 2 + 3\log_2 5. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\log_2 x + \dfrac{6}{\log_5 x} = 2 + 3\log_2 5$ или

$$\log_2 x + \frac{6\log_2 5}{\log_2 x} = 2 + 3\log_2 5. \qquad (*)$$

Если положить $\log_2 x = z$ и $\log_2 5 = a$, то из уравнения $(*)$ получим $z + \dfrac{6a}{z} = 2 + 3a$ или $z^2 - z(2+3a) + 6a = 0$.

Решением квадратного уравнения являются

$$z_{1,2} = \frac{2+3a \pm \sqrt{(2+3a)^2 - 24a}}{2} = \frac{2+3a \pm (2-3a)}{2}.$$

Рассмотрим два случая.

1. Если $z_1 = 2$, то $\log_2 x_1 = 2$ и $x_1 = 4$. Так как $y = \dfrac{500}{x}$, то $y_1 = 125$.
2. Если $z_2 = 3a$, то $\log_2 x_2 = 3\log_2 5$ и $x_2 = 125$. Из равенства $y = \dfrac{500}{x}$ следует, что $y_2 = 4$.

219. $\begin{cases} 2\log_4 x^2 + \log_{0,2} y^3 = -1, \\ 2\log_4 x^4 - \log_{0,2} y = 5. \end{cases}$

Решение. Областью допустимых значений переменных x, y в системе уравнений являются $x \neq 0$ и $y > 0$. Принимая во внимание формулу логарифмирования (16), можно утверждать, что в области допустимых значений исходная система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} 4\log_4 |x| + 3\log_{0,2} y = -1, \\ 8\log_4 |x| - \log_{0,2} y = 5. \end{cases} \qquad (*)$$

Решая систему уравнений $(*)$, получаем

$$\log_4 |x| = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \log_{0,2} y = -1.$$

Отсюда следует, что $x_1 = 2$, $y_1 = 5$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 5$ являются корнями заданной системы уравнений.

220. $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

Решение. Принимая во внимание свойство логарифмов (17), можно записать $x^{\log_8 y} = y^{\log_8 x}$. В таком случае первое уравнение системы принимает вид $x^{\log_8 y} + x^{\log_8 y} = 4$, $x^{\log_8 y} = 2$ или $\log_2 x \cdot \log_2 y = 3$.

Так как второе уравнение системы равносильно уравнению $\log_2 x - \log_2 y = 2$, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 y = 3, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2, \end{cases}$$

из которой получаем

$$\log_2 x = 3, \quad \log_2 y = 1 \quad \text{и} \quad \log_2 x = -1, \quad \log_2 y = -3.$$

Таким образом, корнями заданной системы уравнений являются $x_1 = 8$, $y_1 = 2$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = \dfrac{1}{8}$.

221. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leqslant 2, \\ x + 3y \geqslant 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

Решение. Оценим левую часть первого неравенства системы, используя при этом неравенство Коши (2) и второе неравенство системы, следующим образом: Имеет место

$$4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \geqslant 2\sqrt{4^{x+y-1} \cdot 3 \cdot 4^{2y-1}} = 2\sqrt{3 \cdot 4^{x+3y-2}} \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{3 \cdot 4^{2-\log_4 3 - 2}} = 2.$$

Из полученного неравенства следует, что оба неравенства системы обращаются в равенства. Кроме того, обращается в равенство примененное выше неравенство Коши (2), т. е. имеет место система уравнений

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} = 3 \cdot 4^{2y-1}, \\ x + 3y = 2 - \log_4 3. \end{cases} \qquad (*)$$

Если прологарифмировать по основанию 4 первое уравнение системы $(*)$, то $x + y - 1 = \log_4 3 + 2y - 1$ или $y = x - \log_4 3$.

В таком случае из второго уравнения системы $(*)$ получаем

$$x + 3(x - \log_4 3) = 2 - \log_4 3,$$

$$4x = 2 + 2\log_4 3 \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_4 3 = \log_4(2\sqrt{3}).$$

Так как $y = x - \log_4 3$, то $y_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\log_4 3 = \log_4 \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

§ 2.14. Тригонометрические уравнения и системы

222. $\sin x \cdot (1+\cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$.

Решение. Пусть $\cos x = 1$, тогда из заданного уравнения следует, что $\sin x = \frac{3}{2}$. А это является противоречием. Следовательно, $\cos x \neq 1$ или $1 - \cos x \neq 0$.

Тогда обе части заданного уравнения умножим на $1-\cos x$ и получим равносильное уравнение

$$\sin x \cdot (1-\cos^2 x) = 1 - \cos^3 x$$

или

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1. \qquad (*)$$

Так как $\sin^3 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^3 x \leqslant \cos^2 x$ и $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то $\sin^3 x + \cos^3 x \leqslant 1$. Отсюда и из уравнения $(*)$ следует, что

$$\begin{cases} \sin^3 x = \sin^2 x, \\ \cos^3 x = \cos^2 x. \end{cases}$$

Данная система уравнений равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot (\sin x - 1) = 0, \\ \cos x \cdot (\cos x - 1) = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Так как $\cos x \neq 1$, то из второго уравнения системы $(**)$ имеем $\cos x = 0$. Если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$. Однако из первого уравнения системы $(**)$ получаем $\sin x = 1$. Следовательно, корнями заданного уравнения являются $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n — целое число.

223. $1 + \cos 2x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}\sin^2 3x$.

Решение. Первоначально обе части уравнения умножим на 2. Затем воспользуемся равенством $\sin^2 3x = 1 - \cos^2 3x$ и получим уравнение $\cos^2 3x + 2\cos 2x \cdot \cos 3x = -1$. Если к обеим частям уравнения прибавить $\cos^2 2x$, то $(\cos 3x + \cos 2x)^2 = -\sin^2 2x$. Естественно, что здесь равенство может быть только в том случае,

когда обе части уравнения равны 0, т. е. имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \cos 3x + \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Поскольку $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то из первого уравнения системы $(*)$ получаем кубическое уравнение относительно $\cos x$ следующего вида:

$$4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0. \qquad (**)$$

Пусть $\sin 2x = 0$, тогда $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$. Если $\sin x = 0$, то $\cos x = \pm 1$. Однако, как нетрудно убедиться, из трех значений $\cos x$ уравнению $(**)$ удовлетворяет только $\cos x = -1$.

Корнями уравнения $\cos x = -1$ (а также корнями заданного уравнения) являются $x_1 = \pi(2n+1)$, где n- целое число.

224. $\cos 6x + \sin \frac{5}{2}x = 2$.

Решение. Так как $\cos 6x \leqslant 1$ и $\sin \frac{5}{2}x \leqslant 1$, то $\cos 6x + \sin \frac{5}{2}x \leqslant 2$. Отсюда и из заданного уравнения следует система уравнений

$$\begin{cases} \cos 6x = 1, \\ \sin \frac{5}{2}x = 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Для решения заданного уравнения необходимо найти множество корней каждого из уравнений системы в отдельности, а затем построить их пересечение. Если такое пересечение окажется пустым, то это будет означать, что заданное уравнение корней не имеет.

Решая в отдельности каждое из уравнений системы $(*)$, получаем

$$\begin{cases} 6x = 2\pi n, \\ \frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \end{cases}$$

где n, m — целые числа.

Отсюда следует

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{3}, \\ x = \dfrac{\pi}{5}(4m+1). \end{cases} \qquad (**)$$

Для построения пересечения множеств корней системы $(**)$ рассмотрим равенство $\dfrac{\pi n}{3} = \dfrac{\pi}{5}(4m+1)$. Отсюда получаем $5n = 12m + 3$. Так как правая часть равенства кратна 3, то $n = 3k$, где k — целое число.

Следовательно, $15k = 12m + 3$ или $5k = 4m + 1$. Правая часть последнего равенства нечетная, поэтому k тоже должно быть нечетным, т. е. $k = 2u + 1$, где u — целое число. Тогда имеет место $10u + 5 = 4m + 1$ или $5u = 2m - 2$. Очевидно, что здесь u должно быть четным, поэтому $u = 2t$, где t — целое число. В таком случае $10t = 2m - 2$ и $m = 5t + 1$. Так как второе множество корней $(**)$ задается соотношением $x_1 = \dfrac{\pi}{5}(4m+1)$ и при этом $m = 5t+1$, то корнями заданного уравнения являются

$$x_1 = \frac{\pi}{5}(4m+1) = \frac{\pi}{5}(20t+5) = \pi(4t+1),$$

где t — целое число.

225. $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{1}{\sin 4x}$.

Решение. Для определения области допустимых значений переменной x в уравнении необходимо рассмотреть систему неравенств

$$\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \sin 2x \neq 0, \\ \sin 4x \neq 0, \end{cases}$$

из которой получаем $x \neq \dfrac{\pi}{4}k$, где k — целое число.

Теперь переходим непосредственно к решению заданного уравнения. Имеет место цепочка равносильных уравнений

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x}, \quad \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin 2x + \sin 4x}{\sin 2x \cdot \sin 4x},$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{2\sin 3x \cdot \cos x}{2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin 4x}. \qquad (*)$$

Поскольку $x \neq \dfrac{\pi}{4}k$, то $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ и из уравнения $(*)$ получаем $\sin 4x - \sin 3x = 0$ или $2\sin\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{7}{2}x = 0$. Однако при $x \neq \dfrac{\pi}{4}k$ имеет место $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$. Поэтому необходимо рассмотреть уравнение $\cos\dfrac{7}{2}x = 0$, корнями которого являются $x_1 = \dfrac{\pi}{7}(2n+1)$, где n — целое число.

Однако полученное множество значений x еще нельзя считать корнями заданного уравнения, так как из этого множества необходимо удалить те значения x (если таковые имеются), которые не являются допустимыми для заданного уравнения. С этой целью построим пересечение множества корней уравнения $\cos\dfrac{7}{2}x = 0$ с множеством значений x, которые не входят в область допустимых значений переменной x в заданном уравнении.

Итак, строим искомое пересечение. Имеет место равенство

$$\frac{\pi}{7}(2n+1) = \frac{\pi}{4}k,$$

из которого следует

$$8n + 4 = 7k \quad \text{и} \quad k = 4m, \quad \text{где} \quad m \text{ — целое число.}$$

Далее, получаем

$$8n + 4 = 28m \quad \text{или} \quad 2n + 1 = 7m.$$

Очевидно, что данное равенство выполняется только для нечетных значений m, т. е. $m = 2t + 1$, где t — целое число. Тогда $2n + 1 = 14t + 7$ или $n = 7t + 3$.

Следовательно, корнями заданного уравнения являются

$$x_1 = \frac{\pi}{7}(2n+1),$$

где $n \neq 7t + 3$ и n, t — целые числа

226. $\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} = \cos 2x + \cos 4x$.

Решение. С одной стороны, используя неравенство Коши (3), можно записать $\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} \geqslant 2$. С другой стороны, так как

$\cos 2x \leqslant 1$ и $\cos 4x \leqslant 1$, то $\cos 2x + \cos 4x \leqslant 2$. Следовательно, равенство в заданном уравнении достигается только в том случае, когда обе его части одновременно равны 2, т. е. имеет место следующие равносильные системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2, \\ \cos 2x + \cos 4x = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2, \\ 2\cos^2 2x + \cos 2x = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2, \\ 4\cos^4 x - 3\cos^2 x = 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Из первого уравнения системы $(*)$ следует, что $\cos^2 x = 1$. Очевидно, что подстановка $\cos^2 x = 1$ во второе уравнение системы $(*)$ обращает его в тождество. Следовательно, система уравнений $(*)$ равносильна уравнению $\cos^2 x = 1$.

Значит, корнями заданного уравнения являются

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1), \quad \text{где} \quad n \text{— целое число.}$$

227. $3\sin x + 4\cos 3x \cdot \cos x + 2\sin 5x = 7$.

Решение. Воспользуемся неравенством Коши—Буняковского (9), тогда

$$(3\sin x + 4\cos 3x \cdot \cos x)^2 \leqslant (9 + 16\cos^2 3x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \leqslant 25.$$

Отсюда следует, что

$$3\sin x + 4\cos 3x \cdot \cos x \leqslant 5.$$

Так как

$$2\sin 5x \leqslant 2, \quad \text{то} \quad 3\sin x + 4\cos 3x \cdot \cos x + 2\sin 5x \leqslant 7.$$

Если полученное неравенство сравнить с заданным уравнением, то можно сделать вывод о том, что равенство в уравнении

достигается только в том случае, когда одновременно выполняются следующие три условия:

$$\frac{3}{4\cos 3x} = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cos^2 3x = 1 \quad \text{и} \quad \sin 5x = 1.$$

Покажем, что одновременное выполнение даже двух последних условий невозможно. С этой целью рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \cos 3x = \pm 1, \\ \sin 5x = 1. \end{cases}$$

Корнями этой системы является результат пересечения множеств корней каждого из уравнений системы в отдельности, т. е.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} n, \\ x = \dfrac{\pi}{10}(4m+1), \end{cases}$$

где n, m — целые числа.

Итак, строим пересечение множеств корней каждого уравнения системы. Пусть $\dfrac{\pi}{3} n = \dfrac{\pi}{10}(4m+1)$, тогда $10n = 12m + 3$. Так как для произвольных целых значений n и m левая часть равенства $10n = 12m + 3$ принимает только четные значения, а его правая часть — только нечетные значения, то искомое пересечение представляет собой пустое множество. В этой связи заданное уравнение корней не имеет.

228. $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$.

Решение. Заданное уравнение равносильно уравнению

$$2\sin 2x + \sin x - \sin 3x = 3.$$

Далее, применяя формулу разности синусов двух углов, получаем, $2\sin 2x - 2\sin x \cdot \cos 2x = 3$ или

$$\sin 2x - \sin x \cdot \cos 2x = \frac{3}{2}. \qquad (*)$$

К левой части уравнения $(*)$ применим неравенство Коши—Буняковского (9), тогда

$$(\sin 2x - \sin x \cdot \cos 2x)^2 \leqslant (1 + \sin^2 x)(\sin^2 2x + \cos^2 2x) \leqslant 2.$$

Отсюда следует, что $\sin 2x - \sin x \cdot \cos 2x \leqslant \sqrt{2}$, т. е.

$$\sin 2x - \sin x \cdot \cos 2x < \frac{3}{2}.$$

Следовательно, уравнение $(*)$, а также и заданное уравнение, корней не имеют.

229. $\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

Решение. Поскольку $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, то для левой части уравнения имеет место $-2 \leqslant \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \leqslant 2$.

Так как $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то согласно неравенствам Коши (3) и (4), можно записать $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| \geqslant 2$. Следовательно, равенство в заданном уравнении может быть только в том случае, когда обе его части одновременно равны -2 или 2.

Отсюда получаем две системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = -2, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения первой системы следует, что

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2}, \quad \text{т. е.} \quad \sin x = \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 1,$$

а это противоречит второму уравнению. Следовательно, первая система уравнений является несовместной.

Из второй системы уравнений следует, что

$$\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 1.$$

Следовательно, заданное уравнение имеет корни вида

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad \text{где} \quad n \text{ — целое число.}$$

230. $\cos^2 x - \cos^4 x = \sin^2 x \cdot \sin 3x - 1$.

Решение. Оценим левую и правую части уравнения. Так как $|\cos x| \leqslant 1$, то $\cos^4 x \leqslant \cos^2 x$ и $\cos^2 x - \cos^4 x \geqslant 0$. В то же время

$\sin^2 x \leqslant 1$, $\sin 3x \leqslant 1$ и поэтому $\sin^2 x \cdot \sin 3x - 1 \leqslant 0$. Отсюда следует, что заданное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 x - \cos^4 x = 0, \\ \sin^2 x \cdot \sin 3x = 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Поскольку

$$\cos^2 x - \cos^4 x = \cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) = \sin^2 x \cdot \cos^2 x,$$
$$0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1 \quad \text{и} \quad -1 \leqslant \sin 3x \leqslant 1,$$

то система уравнений $(*)$ равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos x = 0, \\ \sin^2 x = 1, \\ \sin 3x = 1. \end{cases} \qquad (**)$$

Если $\sin^2 x = 1$, то $\cos x = 0$ и $\sin x \cdot \cos x = 0$. Следовательно, из системы уравнений $(**)$ можно удалить первое уравнение. Кроме того, известно, что $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$. В этой связи из системы уравнений $(**)$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ 4\sin^3 x - 3\sin x = -1. \end{cases} \qquad (***)$$

Нетрудно убедиться, что система уравнений $(***)$ равносильна уравнению $\sin x = -1$. Корнями уравнения $\sin x = -1$ (а также корнями заданного уравнения) являются $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — целое число.

231. $(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \cdot \sin 4x = 2$.

Решение. Если обе части уравнения разделить на 2, то получим уравнение $\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \cdot \sin 4x = 1$ или

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 4x = 1. \qquad (*)$$

Так как $-1 \leqslant \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \sin 4x \leqslant 1$, то из уравнения $(*)$ получаем совокупность двух систем уравнений

$$\begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = -1, \\ \sin 4x = -1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 1, \\ \sin 4x = 1. \end{cases} \qquad (**)$$

Корнями первой системы уравнений являются

$$\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 4x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n = \dfrac{\pi}{6}(12n-5), \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}m = \dfrac{\pi}{8}(4m-1), \end{cases}$$

где n, m — целые числа.

Далее, необходимо найти пересечение множеств корней каждого из уравнений системы. С этой целью рассмотрим равенство

$$\frac{\pi}{6}(12n-5) = \frac{\pi}{8}(4m-1), \quad \text{или} \quad 4(12n-5) = 3(4m-1).$$

Левая часть последнего равенства для любых n представляет собой четное число, а правая его часть при любых m является нечетной. Поэтому первая система уравнений $(**)$ является несовместной.

Рассмотрим решение второй системы уравнений, тогда

$$\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 4x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k = \dfrac{\pi}{6}(12k+1), \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}l = \dfrac{\pi}{8}(4l+1), \end{cases}$$

где k, l — целые числа.

Отсюда $\frac{\pi}{6}(12k+1) = \frac{\pi}{8}(4l+1)$ и $4(12k+1) = 3(4l+1)$. По аналогии с предыдущим случаем пересечение множеств корней здесь также пусто.

Следовательно, заданное уравнение корней не имеет.

232. $\sqrt{\dfrac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\dfrac{2-2\cos x}{3}} = \dfrac{2}{3}\sin x + \dfrac{1}{2\sin x}$.

Решение. Из условия следует, что $\sin x > 0$ и $\cos x \geqslant 0$, откуда следует, что $2\pi n < x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n — целое число.

Оценим левую часть уравнения, применяя неравенство Коши—Буняковского (9). Имеет место

$$\left(\sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}}\right)^2 \leqslant (1^2+1^2)\left(\frac{2\cos x}{3} + \frac{2-2\cos x}{3}\right) = \frac{4}{3},$$

т. е.

$$\sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Так как $\sin x > 0$, то для оценки правой части заданного уравнения воспользуемся неравенством Коши (1), т. е.

$$\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{2\sin x} \geqslant 2\sqrt{\frac{2}{3}\sin x \cdot \frac{1}{2\sin x}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, нижняя оценка правой части уравнения совпадает с верхней оценкой его левой части. Значит, имеет место равенство

$$\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{2\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

откуда следует, что $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos x = \pm\frac{1}{2}$. Поскольку $\sin x > 0$ и $\cos x \geqslant 0$, то $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x = \frac{1}{2}$. Подставляя данные значения $\sin x$ и $\cos x$ в исходное уравнение, убеждаемся в том, что его корнями являются

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad \text{где } k \text{ — целое число.}$$

233. $\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \dfrac{\sin y}{2}$.

Решение. Используя неравенство

$$a^2 + b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2}, \qquad (*)$$

справедливость которого следует из неравенства (10) при $n = 2$, оценим левую часть уравнения следующим образом:

$$5\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{\sin^2 2x}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}(1+4)^2 = 12\frac{1}{2}.$$

С другой стороны, имеем $12 + \dfrac{\sin y}{2} \leqslant 12\dfrac{1}{2}$. Следовательно, значения обеих частей заданного уравнения совпадают и равны $12\dfrac{1}{2}$. Так как равенство в $(*)$ достигается тогда и только тогда, когда $a = b$, то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} = \cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}, \\ \sin y = 1. \end{cases} \qquad (**)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$f(z) = z^2 + \frac{1}{z^2}, \quad \text{где } 0 < z < 1.$$

Тогда первое уравнение системы $(**)$ можно переписать в виде функционального уравнения $f(\sin x) = f(\cos x)$. Так как

$$f'(z) = \frac{2(z^4 - 1)}{z^3} < 0 \quad \text{при} \quad 0 < z < 1,$$

то функция $f(z)$ убывает на рассматриваемом интервале.

Кроме того, функция $f(z)$ — четная и поэтому из функционального уравнения $f(\sin x) = f(\cos x)$ получаем равносильное уравнение $\sin x = \pm\cos x$, корнями которого являются

$$x_1 = \frac{\pi}{4}(2n+1), \quad \text{где } n \text{ — целое число.}$$

Корнями второго уравнения системы $(**)$ будут

$$y_1 = \frac{\pi}{2}(4k+1), \quad \text{где } k \text{ — целое число.}$$

234. $\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \dfrac{3}{2}.$

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} - 2\cos^2\frac{x+y}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$

$$2\cos^2\frac{x+y}{2} - 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} + \frac{1}{2} = 0,$$

$$4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} + \cos^2\frac{x-y}{2} - \cos^2\frac{x-y}{2} + 1 = 0,$$

$$\left(2\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{x-y}{2} = 0. \qquad (*)$$

Так как левая часть уравнения $(*)$ представляет собой сумму двух квадратов, то имеет место система уравнений

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2} = \cos\dfrac{x-y}{2}, \\ \sin\dfrac{x-y}{2} = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Из второго уравнения системы $(**)$ следует, что $\cos\dfrac{x-y}{2} = \pm 1$. В этой связи система уравнений $(**)$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{1}{2}, \\ \sin\dfrac{x-y}{2} = 0. \end{cases} \qquad (***)$$

Решая уравнения системы $(***)$, получаем

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1) \quad \text{и} \quad \frac{x-y}{2} = \pi k, \quad \text{где } n, k \text{ — целые числа.}$$

Следовательно, корнями заданного уравнения являются

$$x_1 = \frac{\pi}{3}(3n+3k+1), \qquad y_1 = \frac{\pi}{3}(3n-3k+1) \quad \text{и}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}(3n+3k-1), \qquad y_2 = \frac{\pi}{3}(3n-3k-1),$$

где n, k — целые числа.

235. $\dfrac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\cos^2 2x + \sin^2 2x}$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения

$$\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\cos^2 2x + \sin^2 2x} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x} =$$
$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x)}{4(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x)} = \frac{1}{4}.$$

В таком случае заданное уравнение принимает вид

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1. \qquad (*)$$

Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то из уравнения $(*)$ получаем

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$
$$\sin^2 x - \sin^{10} x + \cos^2 x - \cos^{10} x = 0$$

или

$$\sin^2 x \cdot (1 - \sin^8 x) + \cos^2 x \cdot (1 - \cos^8 x) = 0. \qquad (**)$$

Однако, известно, что $\sin^2 x \geqslant 0$, $\cos^2 x \geqslant 0$, $\sin^8 x \leqslant 1$, $\cos^8 x \leqslant 1$ и $1 - \sin^8 x \geqslant 0$, $1 - \cos^8 x \geqslant 0$. В этой связи уравнение $(**)$ равносильно совокупности двух систем уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \cos x = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \pm 1, \end{cases}$$

корнями которой являются $x_1 = \dfrac{\pi}{2}n$, где n — целое число.

236. $1 + \cos^6 x = 2 \cdot \sqrt[3]{\cos 2x}$.

Решение. Известно, что $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Поэтому заданное уравнение равносильно уравнению

$$1 + \cos^6 x = 2 \cdot \sqrt[3]{2\cos^2 x - 1}.$$

Если положить $\cos^2 x = y$, то получим уравнение

$$1 + y^3 = 2 \cdot \sqrt[3]{2y - 1}, \qquad (*)$$

где $0 \leqslant y \leqslant 1$. Поскольку $y \geqslant 0$, то $1 + y^3 \geqslant 1$ и из уравнения $(*)$ следует, что $2 \cdot \sqrt[3]{2y - 1} \geqslant 1$ или $y \geqslant \dfrac{9}{16}$. Таким образом, имеем $\dfrac{9}{16} \leqslant y \leqslant 1$.

Представим уравнение $(*)$ в следующем виде:

$$y = \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2y - 1} - 1}. \qquad (**)$$

Пусть $f(z) = \sqrt[3]{2z - 1}$. Тогда уравнение $(**)$ принимает вид функционального уравнения $y = f(f(y))$. Так как функция $f(z) = \sqrt[3]{2z - 1}$ возрастает на всей числовой оси OZ, то уравнение $y = f(f(y))$ равносильно уравнению $y = f(y)$ на области допустимых значений y. Следовательно, уравнение $(**)$ равносильно уравнению $y = \sqrt[3]{2y - 1}$, где $\dfrac{9}{16} \leqslant y \leqslant 1$.

Если обе части уравнения $y = \sqrt[3]{2y - 1}$ возвести в третью степень, то $y^3 - 2y + 1 = 0$ или $(y - 1)(y^2 + y - 1) = 0$. Отсюда, с учетом того, что $\dfrac{9}{16} \leqslant y \leqslant 1$, следует, что $y_1 = 1$ и $y_2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Так как $\cos^2 x = y$, то $\cos x = \pm 1$ и $\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}}$. Следовательно, корнями заданного уравнения являются

$$x_1 = \pi n \quad \text{и} \quad x_2 = \pm \arccos\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} + \pi k$$

где n, k — целые числа

237. $\sqrt[4]{2\sin x - 1} + \sqrt[4]{3\sin x - 2} = 2$

Решение. Так как $\sin x \leqslant 1$, то $2\sin x - 1 \leqslant 1$ и $3\sin x - 2 \leqslant 1$. В этой связи $\sqrt[4]{2\sin x - 1} \leqslant 1$, $\sqrt[4]{3\sin x - 2} \leqslant 1$ и

$$\sqrt[4]{2\sin x - 1} + \sqrt[4]{3\sin x - 2} \leqslant 2.$$

Если полученное неравенство сравнить с заданным уравнением, то видно, что равенство в уравнении достигается только в том случае, когда $\sqrt[4]{2\sin x - 1} = 1$ и $\sqrt[4]{3\sin x - 2} = 1$.

Отсюда получаем $\sin x = 1$ или $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n — целое число.

238. $\sin^2 x + \sin^2 y = \sin x + \sin y + \sin x \cdot \sin y - 1$.

Решение. Если обе части уравнения умножить на 2, то

$$2\sin^2 x + 2\sin^2 y - 2\sin x - 2\sin y - 2\sin x \cdot \sin y + 2 = 0,$$
$$(\sin^2 x - 2\sin x + 1) + (\sin^2 y - 2\sin y + 1) +$$
$$+ (\sin^2 x - 2\sin x \cdot \sin y + \sin^2 y) = 0,$$
$$(\sin x - 1)^2 + (\sin y - 1)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 0. \qquad (*)$$

Поскольку каждое из слагаемых в левой части уравнения $(*)$ является неотрицательным, то $\sin x = \sin y = 1$. Отсюда получаем корни заданного уравнения $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $y_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, где n, k — целые числа.

239. $2 + 2(\sin y + \cos y) \cdot \sin x = \cos 2x$.

Решение. С учетом того, что $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, представим заданное уравнение в виде квадратного уравнения относительно $\sin x$, т. е.

$$2\sin^2 x + 2(\sin y + \cos y)\sin x + 1 = 0. \qquad (*)$$

Рассмотрим дискриминант этого уравнения и потребуем, чтобы он был неотрицательным, т. е.

$$(\sin y + \cos y)^2 - 2 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad |\sin y + \cos y| \geqslant \sqrt{2}.$$

Однако известно, что $-\sqrt{2} \leqslant \sin y + \cos y \leqslant \sqrt{2}$. Следовательно, имеет место равенство $|\sin y + \cos y| = \sqrt{2}$.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\sin y + \cos y = \sqrt{2}$, тогда $y_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$ и из уравнения $(*)$ получаем

$$2\sin^2 x + 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0, \quad (\sqrt{2}\sin x + 1)^2 = 0,$$
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad x_1 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k,$$

где n, k — целые числа.

2) Пусть $\sin y + \cos y = -\sqrt{2}$, тогда $y_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi l$ (l — целое число) и уравнение $(*)$ принимает вид $2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$. Отсюда получаем

$$(\sqrt{2}\sin x - 1)^2 = 0, \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = (-1)^m\frac{\pi}{4} + \pi m,$$

где m — целое число.

240. $x^2 + 2\sin \pi x = 3x + \cos^2 \pi x - \dfrac{17}{4}$.

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$x^2 + 2\sin \pi x = 3x + 1 - \sin^2 \pi x - \frac{17}{4},$$
$$x^2 + 2\sin \pi x - 3x + \sin^2 \pi x + \frac{13}{4} = 0,$$
$$(\sin \pi x + 1)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

Отсюда следует система уравнений

$$\begin{cases} \sin \pi x + 1 = 0, \\ x - \dfrac{3}{2} = 0, \end{cases}$$

единственным корнем которой является $x_1 = \dfrac{3}{2}$.

241. $1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3} \cdot \sin 2x = 12x^2 - 4\pi x + \dfrac{\pi^2}{3} + 2$.

Решение. Левую часть уравнения преобразуем следующим образом:

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3} \cdot \sin 2x = \cos 2x + \sqrt{3} \cdot \sin 2x =$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) =$$
$$= 2 \cdot \left(\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos 2x + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin 2x\right) =$$
$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Следовательно, имеем уравнение

$$12x^2 - 4\pi x + \frac{\pi^2}{3} + 2 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Отсюда получаем неравенство $12x^2 - 4\pi x + \dfrac{\pi^2}{3} + 2 \leqslant 2$, которое равносильно $36x^2 - 12\pi x + \pi^2 \leqslant 0$ или $(6x-\pi)^2 \leqslant 0$.

Так как $(6x-\pi)^2 \geqslant 0$, то $(6x-\pi)^2 = 0$ или $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$. Подставим значение x_1 в заданное уравнение и убедимся, что $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ является его корнем.

242. $(\sin^4 x + \cos^2 2x)\cdot\left(\dfrac{1}{\sin^4 x} + \dfrac{1}{\cos^2 2x}\right) = 4\cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - x^2}.$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении является объединение множеств $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Далее, воспользуемся неравенством

$$(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4, \qquad (*)$$

справедливость которого следует из неравенства (5) при $n = 2$. Причем здесь требуется, чтобы $a > 0$ и $b > 0$.

На области допустимых значений переменной x выполняются неравенства $\sin^4 x > 0$ и $\cos^2 2x > 0$, поэтому к левой части уравнения можно применить неравенство $(*)$. В результате этого применения получаем, что для любого x левая часть уравнения не меньше 4.

В то же время на области допустимых значений переменной x имеет место неравенство $4\cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - x^2} \leqslant 4$. Следовательно, заданное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} (\sin^4 x + \cos^2 2x)\cdot\left(\dfrac{1}{\sin^4 x} + \dfrac{1}{\cos^2 2x}\right) = 4, \\ 4\cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - x^2} = 4. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы (с учетом области допустимых значений x) находим его корни $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и $x_2 = -\dfrac{\pi}{2}$. Подставляя значения x_1 и x_2 в первое уравнение системы, убеждаемся в том, что они являются его корнями.

Значит, заданное уравнение имеет два корня $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и $x_2 = -\dfrac{\pi}{2}$.

243. $\begin{cases} \sin x\cdot\cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos x\cdot\sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Решение. Первоначально сложим два уравнения системы, а затем вычтем из второго уравнения первое. Тогда получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(y-x) = 1, \end{cases}$$

из которой следует, что $x + y = \pi n$ и $y - x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, где n, k — целые числа. Следовательно, корнями заданной системы уравнений являются $x_1 = \dfrac{\pi}{4}(2n - 4k - 1)$, $y_1 = \dfrac{\pi}{4}(2n + 4k + 1)$, где n, k — целые числа.

244. $\begin{cases} 4\sin x - 2\sin y = 3, \\ 2\cos x - \cos y = 0. \end{cases}$

Решение. Первоначально приведем систему уравнений к виду

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}\sin y, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}\cos y. \end{cases} \qquad (*)$$

Если возвести в квадрат оба уравнения системы $(*)$, а затем их сложить, то

$$1 = \frac{9}{16} + \frac{3}{4}\sin y + \frac{1}{4}\sin^2 y + \frac{1}{4}\cos^2 y \quad \text{или} \quad \sin y = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, имеем

$$y = (-1)^n \arcsin\frac{1}{4} + \pi n, \quad \text{где } n \text{ —целое число.} \qquad (**)$$

Из первого уравнения системы (*) находим $\sin x = \dfrac{7}{8}$ и

$$x = (-1)^m \arcsin\frac{7}{8} + \pi m, \qquad (***)$$

где m — целое число.

Так как при решении системы уравнений (*) использовалась операция возведения в квадрат, то возможно появление посторонних корней. В этой связи необходимо найденные значения (**) и (***) подставить во второе уравнение системы (*), из которого следует, что знаки численных значений $\cos x$ и $\cos y$ должны совпадать. Однако нетрудно видеть, что при четных значениях n и m в формулах (**), (***) соответствующие значения $\cos x$ и $\cos y$ положительные, а при нечетных значениях n и m эти значения отрицательны. Отсюда получаем

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin\dfrac{7}{8} + 2\pi k, \\ y_1 = \arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi l, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -\arcsin\dfrac{7}{8} + \pi(2k+1), \\ y_2 = -\arcsin\dfrac{1}{4} + \pi(2l+1), \end{cases}$$

где k, l — целые числа.

§ 2.15. Тригонометрические неравенства

245. Доказать, что для любых x $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2}k,\ k\right.$ — целое число) выполняется неравенство $\left(1 + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right) \geqslant 9$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства

$$\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$
$$= \left(1 + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\right) =$$
$$= (2 + \operatorname{ctg}^2 x)(2 + \operatorname{tg}^2 x) = 5 + 2(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) =$$
$$= 9 + 2(\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x \cdot ctgx + ctg^2 x) = 9 + 2(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 \geqslant 9.$$

246. Доказать, что для любого действительного x имеет место неравенство $(\sin^2 x)^{\cos^2 x} + (\cos^2 x)^{\sin^2 x} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

Решение. Очевидно, что требуемое неравенство справедливо для $x = \dfrac{\pi}{2}n$, где n — целое число. Пусть теперь $x \neq \dfrac{\pi}{2}n$. Тогда $0 < \sin^2 x < 1$ и $0 < \cos^2 x < 1$. Воспользуемся тождеством

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

и применим к левой части неравенства неравенство Бернулли (8), тогда

$$(\sin^2 x)^{\cos^2 x} + (\cos^2 x)^{\sin^2 x} = (1 - \cos^2 x)^{\cos^2 x} + (1 - \sin^2 x)^{\sin^2 x} \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \cos^4 x + 1 - \sin^4 x = 2 - (\sin^4 x + \cos^4 x) =$$
$$= 2 - ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) =$$
$$= 2 - (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x) = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

247. $\big(\sin^2(x+y) + 2\sin(x+y) + 2\big) \cdot \log_2(3^x + 3^{-x}) \leqslant 1$.

Решение. Из условия задачи получаем

$$\big((\sin(x+y) + 1)^2 + 1\big) \cdot \log_2(3^x + 3^{-x}) \leqslant 1. \qquad (*)$$

Очевидно, что $(\sin(x+y)+1)^2 + 1 \geqslant 1$. Далее, согласно неравенству Коши (3), имеем $3^x + 3^{-x} = 3^x + \dfrac{1}{3^x} \geqslant 2$. Тогда $\log_2(3^x + 3^{-x}) \geqslant 1$.

Таким образом, имеет место неравенство

$$\big((\sin(x+y) + 1)^2 + 1\big) \cdot \log_2(3^x + 3^{-x}) \geqslant 1.$$

Отсюда и из неравенства (*) следует равенство

$$\big((\sin(x+y) + 1)^2 + 1\big) \cdot \log_2\left(3^x + 3^{-x}\right) = 1.$$

Данное равенство имеет место только в том случае, когда $\sin(x+y) = -1$ и $3^x = 1$. Следовательно, решением неравенства являются $x_1 = 0$ и $y_1 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n — целое число.

248. Доказать, что если

$$\sin x + \sin y + \sin z \geqslant \sqrt{5}, \quad \text{то} \quad \cos x + \cos y + \cos z \leqslant 2.$$

Решение. Воспользуемся методом от противного. Допустим, что существуют такие значения x, y, z, для которых

$$\sin x + \sin y + \sin z \geqslant 5,$$

а требуемое неравенство не выполняется, т. е. имеет место система неравенств

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z \geqslant \sqrt{5}, \\ \cos x + \cos y + \cos z > 2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$(\sin x + \sin y + \sin z)^2 + (\cos x + \cos y + \cos z)^2 > 9,$$
$$3 + 2(\sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y) + 2(\sin y \cdot \sin z + \cos y \cdot \cos z) + \\ + 2(\sin x \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos z) > 9$$

или

$$\cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(x-z) > 3. \qquad (*)$$

Однако неравенство $(*)$ является противоречивым, поскольку

$$\cos(x-y) \leqslant 1, \quad \cos(y-z) \leqslant 1, \quad \cos(x-z) \leqslant 1 \quad \text{и}$$
$$\cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(x-z) \leqslant 3.$$

Полученное противоречие свидетельствует о справедливости неравенства $\cos x + \cos y + \cos z \leqslant 2$ для произвольных значений x, y, z при условии, что $\sin x + \sin y + \sin z \geqslant \sqrt{5}$.

§ 2.16. Смешанные уравнения и неравенства

249. $x + y + z + \dfrac{1}{xy} = \cos(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \cos\sqrt{z} + \cos(xyz)$.

Решение. Из уравнения следует, что $x > 0, y > 0$ и $z \geqslant 0$. Так как $z \geqslant 0$, то $x + y + z + \dfrac{1}{xy} \geqslant x + y + \dfrac{1}{xy}$.

Если воспользоваться неравенством Коши (1) при $n = 3$, то

$$x + y + \frac{1}{xy} \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{xy\frac{1}{xy}} = 3.$$

Следовательно, для левой части уравнения имеет место неравенство

$$x + y + z + \frac{1}{xy} \geqslant 3. \qquad (*)$$

Поскольку $\cos(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \leqslant 1$, $\cos\sqrt{z} \leqslant 1$ и $\cos(xyz) \leqslant 1$, то

$$\cos(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \cos\sqrt{z} + \cos(xyz) \leqslant 3.$$

Отсюда и из неравенства $(*)$ следует, что равенство в заданном уравнении может быть только в том случае, когда обе его части равны 3. Левая часть уравнения принимает минимальное значение при $x_1 = y_1 = 1$ и $z_1 = 0$. Нетрудно убедиться в том, что при данных значениях переменных x, y, z правая часть уравнения также равна 3.

Следовательно, найденные значения x_1, y_1, z_1 являются корнями заданного уравнения.

250. $\cos^2(x \sin x) = 1 + \lg^2 \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении является вся числовая ось OX. Причем для любых x имеют место неравенства $\cos^2(x \sin x) \leqslant 1$ и $1 + \lg^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \geqslant 1$. Следовательно, заданное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos^2(x \sin x) = 1, \\ \lg^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Однако только $x_1 = 0$ удовлетворяет первому уравнению системы.

Таким образом, $x_1 = 0$ является единственным корнем заданного уравнения.

251. $\lg(x^2 - 4x + 14) + \sin(xy) = 0$.

Решение. Перепишем уравнение как

$$\lg(x^2 - 4x + 14) = -\sin(xy). \qquad (*)$$

Так как $x^2 - 4x + 14 = (x-2)^2 + 10 \geqslant 10$, то $\lg(x^2 - 4x + 14) \geqslant 1$. В то же время $-\sin(xy) \leqslant 1$, поэтому равенство в уравнении $(*)$

может иметь место только в том случае, когда обе его части равны 1, т. е. получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(x^2 - 4x + 14) = 1, \\ \sin(xy) = -1. \end{cases} \qquad (**)$$

Из первого уравнения системы $(**)$ следует $x^2 - 4x + 14 = 10$ и $x_1 = 2$. Если $x_1 = 2$ подставить во второе уравнение системы $(**)$, то $\sin 2y = -1$ и $y_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где n — целое число.

252. $\log_2\left(17 - \left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right|\right) = \sqrt{2x + 15 - x^2}$.

Решение. Первоначально оценим снизу левую часть уравнения. Так как $\left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right| \leqslant 1$, то

$$17 - \left|\sin\frac{\pi x}{2}\right| \geqslant 16 \quad \text{и} \quad \log_2(17 - \left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|) \geqslant 4.$$

Вместе с тем, для правой части уравнения справедлива верхняя оценка

$$\sqrt{2x + 15 - x^2} = \sqrt{16 - (x-1)^2} \leqslant 4.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что равенство в уравнении имеет место только в том случае, когда обе его части равны 4, т. е.

$$\begin{cases} \log_2\left(17 - \left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right|\right) = 4, \\ \sqrt{2x + 15 - x^2} = 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right| = 1, \\ x - 1 = 0. \end{cases}$$

Последняя система уравнений имеет единственный корень $x_1 = 1$.

253. $(\log_{\cos x}\sin^2 x)\cdot(\log_{\cos^2 x}\sin x) = 4$.

Решение. Область допустимых значений переменной x в уравнении определяется системой неравенств $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \end{cases}$ из которой следует, что $2\pi l < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l$, где l — целое число.

Из заданного уравнения получаем

$$(2\log_{\cos x}\sin x)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\log_{\cos x}\sin x\right) = 4,$$

$$\log^2_{\cos x}\sin x = 4 \quad \text{или} \quad \log_{\cos x}\sin x = \pm 2.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\log_{\cos x}\sin x = 2$, тогда $\sin x = \cos^2 x$. Отсюда получаем $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ и $(\sin x)_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Поскольку

$$0 < \sin x < 1 \quad \text{и} \quad 2\pi l < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad \text{то}$$

$$x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi n, \quad \text{где } n \text{ — целое число.}$$

2) Если $\log_{\cos x}\sin x = -2$, то $\sin x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\sin x = \dfrac{1}{1 - \sin^2 x}$ или $\sin^3 x - \sin x + 1 = 0$. Так как $0 < \sin x < 1$, то уравнение $\sin^3 x - \sin x + 1 = 0$ корней не имеет.

Таким образом, корнями заданного уравнения являются

$$x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi n,$$

где n — целое число

254. $(3 - \cos^2 x - 2\sin x)(\lg^2 y + 2\lg y + 4) \leqslant 3$.

Решение. Перепишем неравенство в равносильном виде

$$((\sin x - 1)^2 + 1)\cdot((\lg y + 1)^2 + 3) \leqslant 3. \qquad (*)$$

Так как $(\sin x - 1)^2 \geqslant 0$ и $(\lg y + 1)^2 \geqslant 0$, то

$$((\sin x - 1)^2 + 1)\cdot((\lg y + 1)^2 + 3) \geqslant 3.$$

Отсюда и из неравенства $(*)$ получаем равенство

$$((\sin x - 1)^2 + 1)\cdot((\lg y + 1)^2 + 3) = 3,$$

которое имеет место только в том случае, когда $\sin x = 1$ и $\lg y = -1$.

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ (n — целое число) и $y_1 = \dfrac{1}{10}$.

255. $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leqslant \dfrac{1}{8}$.

Решение. Из неравенства Коши (1) при $n = 3$ следует, что

$$cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leqslant \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3. \qquad (*)$$

Докажем вспомогательное неравенство

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}. \qquad (**)$$

Для этого представим левую часть неравенства $(**)$ в виде

$$\cos A + \cos B + \cos C = \cos A + 2\cos\frac{B+C}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2}. \qquad (***)$$

Так как A, B, C — углы треугольника, то

$$A + B + C = \pi, \quad 0 < \frac{B+C}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому $0 < \cos\dfrac{B+C}{2} < 1$, $0 < \cos\dfrac{B-C}{2} \leqslant 1$ и

$$\cos\frac{B+C}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2} \leqslant \cos\frac{B+C}{2}.$$

Поскольку $B + C = \pi - A$, то с учетом приведенного выше неравенства из равенства $(***)$ следует, что

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \cos A + 2\cos\frac{B+C}{2} =$$

$$= \cos A + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} - 2 \cdot \left(\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{3}{2}.$$

Следовательно, неравенство $(**)$ доказано, а вместе с ним доказано и требуемое неравенство.

§ 2.17. Неравенства в геометрии

256. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant \dfrac{9}{4}$.

Решение. Первоначально докажем вспомогательное неравенство

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\frac{3}{2}. \qquad (*)$$

Пусть O — центр окружности радиуса R, описанной вокруг треугольника ABC, т. е. $OA = OB = OC = R$. Известно, что вектор $\overline{S} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ является нулевым только для равностороннего треугольника ABC, поэтому в общем случае

$$(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})^2 \geqslant 0.$$

Используя свойства скалярного произведения векторов, можно записать

$$\overline{OA} \circ \overline{OB} = R^2 \cos 2C,$$

$$\overline{OA} \circ \overline{OC} = R^2 \cos 2B,$$

$$\overline{OB} \circ \overline{OC} = R^2 \cos 2A \quad \text{и}$$

$$(\overline{OA})^2 = (\overline{OB})^2 = (\overline{OC})^2 = R^2.$$

Тогда из неравенства $(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})^2 \geqslant 0$ следует неравенство $3R^2 + 2R^2\cos 2A + 2R^2\cos 2B + 2R^2\cos 2C \geqslant 0$, из которого вытекает неравенство $(*)$.

Далее, левую часть требуемого неравенства представим, как

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2C) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C).$$

Отсюда, используя доказанное выше неравенство $(*)$, получаем

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

257. $\left(\sin\dfrac{A}{2}\right)^{-1} + \left(\sin\dfrac{B}{2}\right)^{-1} + \left(\sin\dfrac{C}{2}\right)^{-1} \geqslant 6$.

Решение. Используя неравенство Коши (1) при $n = 3$, можно записать

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}}. \qquad (*)$$

Первоначально для треугольника ABC докажем вспомогательное неравенство

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}. \qquad (**)$$

Преобразуем и оценим сверху левую часть неравенства $(**)$ следующим образом:

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\frac{A+B}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}-\cos^2\frac{A+B}{2}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos^2\frac{A+B}{2}\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\leqslant\frac{1}{8}.$$

При доказательстве неравенства $(**)$ был использован тот факт, что для углов треугольника ABC справедливы неравенства

$$0<\frac{A+B}{2}<\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{2},$$
$$0<\cos\frac{A+B}{2}<1,\quad 0<\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 1\quad \text{и}$$
$$\cos\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}\leqslant\cos\frac{A+B}{2}.$$

Таким образом, доказана справедливость неравенства $(**)$. Отсюда и из неравенства $(*)$ вытекает справедливость требуемого неравенства.

Примечание. Неравенство $(**)$ можно доказать другим способом. Пусть в треугольнике ABC стороны $AB=c$, $AC=b$ и $BC=a$.

Используя теорему косинусов, можно записать

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=(b-c)^2+2bc\cdot(1-\cos A)=$$
$$=(b-c)^2+4bc\cdot\sin^2\frac{A}{2}.$$

Отсюда следует, что $4bc\cdot\sin^2\frac{A}{2}\leqslant a^2$ или $\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}$. Проведя аналогичные рассуждения, получаем $\sin\frac{B}{2}\leqslant\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ и $\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}$.

Следовательно, имеет место

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{ac}}\cdot\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{abc}{8abc}=\frac{1}{8}.$$

Итак, неравенство $(**)$ доказано.

258. $\operatorname{tg}^2 A+\operatorname{tg}^2 B+\operatorname{tg}^2 C\geqslant 9.$

Решение. Преобразуем неравенство как

$$(\operatorname{tg}^2 A+1)+(\operatorname{tg}^2 B+1)+(\operatorname{tg}^2 C+1)\geqslant 12.$$

Так как $\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, то требуемое неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}\geqslant 12. \qquad (*)$$

Для доказательства неравенства $(*)$ применим к его левой части неравенство Коши (1) при $n=3$, тогда

$$\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{(\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C)^2}}. \qquad (**)$$

Поскольку ранее было доказано, что для углов треугольника ABC выполняется неравенство $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\leqslant\frac{1}{8}$ (см. задачу 255), то из неравенства $(**)$ следует, что

$$\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}\geqslant 12.$$

259. $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1.$

Решение. По аналогии с решением задачи 258 требуемое неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\geqslant 4. \qquad (*)$$

Также по аналогии имеем неравенство

$$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{\left(\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\right)^2}}.\qquad(**)$$

Докажем вспомогательное неравенство

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}.\qquad(***)$$

Так как $0<A<\pi$, $0<B<\pi$ и $0<C<\pi$, то

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos B}{2}}\quad\text{и}$$
$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos C}{2}}.$$

Применяя приведенные выше равенства, а затем неравенство Коши при $n=3$, получаем

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(1+\cos A)\cdot(1+\cos B)\cdot(1+\cos C)}{8}}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3}.$$

Однако ранее было доказано (см. задачу 255), что

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}.$$

т. е. неравенство $(***)$, а вместе с ним и неравенства $(*)$ и $(**)$, доказаны.

260. Доказать, что $\dfrac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2+2ac}{a^2+c^2}+\dfrac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3$, где a, b, c — стороны треугольника.

Решение. Используя основное свойство треугольника $a+b>c$, можно записать $a>c-b$ или $a^2>(c-b)^2$, откуда следует, что $a^2+2bc>b^2+c^2$ или $\dfrac{a^2+2bc}{b^2+c^2}>1$.

Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем неравенства $\dfrac{b^2+2ac}{a^2+c^2}>1$ и $\dfrac{\widetilde{n}^2+2ab}{a^2+b^2}>1$.

Суммируя приведенные выше три неравенства, получаем требуемое неравенство.

261. Доказать, что $(a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)\geqslant 36S^2$, где a, b, c — стороны треугольника; h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, опущенные на эти стороны; S — площадь треугольника.

Решение. Известно, что для вычисления площади треугольника S справедливы формулы

$$S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2},\quad\text{т. е.}\,6S=ah_a+bh_b+ch_c.$$

Далее, используя неравенство Коши—Буняковского (9), получаем

$$(6S)^2=(ah_a+bh_b+ch_c)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2).$$

Отсюда следует справедливость требуемого неравенства.

262. Доказать, что для произвольного треугольника, имеет место неравенство $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\cdot S$, где a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь.

Решение. Воспользуемся неравенством Коши (1) при $n=3$. Тогда

$$(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3=\frac{p^3}{27}.$$

Так как $(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\dfrac{p^3}{27}$, то

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\leqslant\sqrt{\frac{p^4}{27}}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}=\frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}},$$

т. е.

$$S\leqslant\frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}.\qquad(*)$$

В соответствии с неравенством Коши—Буняковского (9), можно записать $(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$.

Отсюда и из неравенства $(*)$ следует неравенство

$$S \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Следовательно, доказано, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\cdot S$.

Примечание. Доказанное неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда искомый треугольник является равносторонним, сторона которого равна a. В таком случае $S = \dfrac{\sqrt{3}\cdot a^2}{4}$.

263. Доказать, что для выпуклого четырехугольника $ABCD$ справедливо неравенство $S_{ABCD} \leqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$, где a, b, c, d — стороны четырехугольника.

Решение. В четырехугольнике $ABCD$ обозначим стороны следующим образом: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и $AD=d$. Далее, проведем диагональ AC и тем самым разобьем четырехугольник $ABCD$ на два треугольника ABC и ACD. Тогда $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}$.

Известно, что $S_{ABC} = \dfrac{ab\cdot\sin B}{2} \leqslant \dfrac{ab}{2}$. Используя неравенство Коши (2), можно записать $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Значит,

$$S_{ABC} \leqslant \frac{a^2+b^2}{4}.$$

По аналогии получаем $S_{ACD} \leqslant \dfrac{c^2+d^2}{4}$. Так как

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD},$$

то требуемое неравенство доказано.

Примечание. Неравенство $S_{ABCD} \leqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$ превращается в равенство тогда и только тогда, когда $ABCD$ — квадрат.

264. Доказать неравенство $a^2+b^2+c^2<2(1-abc)$, где a, b, c — стороны треугольника, периметр которого равен 2.

Решение. Если a, b, c — стороны треугольника, периметр которого равен 2, то $a<1$, $b<1$ и $c<1$ (в противном случае одна

из сторон треугольника будет больше суммы двух других). В этой связи имеет место неравенство $(1-a)(1-b)(1-c)>0$.

Раскрывая скобки и преобразуя левую часть неравенства, получим

$$\begin{aligned}
&1-(a+b+c)+ab+ac+bc-abc=\\
&=1-2+ab+ac+bc-abc=\\
&=-1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+ab+ac+bc-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-abc=\\
&=-1+\frac{(a+b+c)^2}{2}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-abc=\\
&=-1+\frac{4}{2}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-abc=\\
&=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-abc>0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство $a^2+b^2+c^2<2(1-abc)$.

265. Доказать неравенство $a+b+c \geqslant 6\sqrt{3}r$, где a, b, c — стороны треугольника, а r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение. Пусть $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$. Воспользуемся неравенством Коши (1) при $n=3$, тогда

$$3\cdot\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant p-a+p-b+p-c=p.$$

Отсюда получаем $27p(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant p^4$, т. е. $27S^2\leqslant p^4$, где S — площадь треугольника. Из полученного неравенства следует, что $27\left(\dfrac{S}{p}\right)^2 \leqslant p^2$ или $27r^2 \leqslant p^2$, т. е. $p \geqslant 3\sqrt{3}r$. Отсюда получаем требуемое неравенство $a+b+c \geqslant 6\sqrt{3}r$.

266. Доказать, что $h_a+h_b+h_c \geqslant 9r$, где h_a, h_b, h_c — три высоты произвольного треугольника, а r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение. Первоначально докажем вспомогательное соотношение между h_a, h_b, h_c и r вида $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$.

Известно, что площадь S треугольника со сторонами a, b, c вычисляется по формулам $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = pr$, где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

Используя неравенство (5), можно записать

$$(h_a + h_b + h_c) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \geqslant 9.$$

Ранее было доказано, что $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$. Поэтому имеет место неравенство $\frac{h_a + h_b + h_c}{r} \geqslant 9$. Отсюда следует требуемое неравенство.

267. Доказать, что в любом треугольнике диаметр вписанной окружности не больше радиуса описанной окружности, т. е. $2r \leqslant R$.

Решение. Для треугольника, полупериметр которого равен p, а площадь равна S, справедливы соотношения $r = \frac{S}{p}$ и $R = \frac{abc}{4S}$. Отсюда получаем

$$\frac{2r}{R} = \frac{8S^2}{abcp} = \frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abcp},$$

т. е.

$$\frac{2r}{R} = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}. \tag{$*$}$$

Применяя неравенство Коши (2), получаем неравенства

$$(p-a)(p-b) \leqslant \left(\frac{p-a+p-b}{2}\right)^2 = \frac{\widetilde{n}^2}{4},$$

$$(p-a)(p-c) \leqslant \frac{b^2}{4} \quad \text{и}$$

$$(p-b)(p-c) \leqslant \frac{a^2}{4}, \quad \text{т. е.}$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant \frac{abc}{8}.$$

Отсюда и из равенства $(*)$ следует, что $\frac{2r}{R} \leqslant \frac{8abc}{8abc} = 1$ или $2r \leqslant R$.

268. Доказать, что для произвольного треугольника, имеет место двойное неравенство $\frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S \leqslant r \cdot R \leqslant \frac{2p^2}{27}$, где p — полупериметр и S — площадь треугольника, r, R — радиусы вписанной в треугольник и описанной вокруг треугольника окружностей, соответственно.

Решение. Известно, что $S = p \cdot r$ и $S = \frac{abc}{4R}$.

Тогда $r = \frac{2S}{a+b+c}$, $R = \frac{abc}{4S}$ и

$$r \cdot R = \frac{2S}{a+b+c} \cdot \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{2(a+b+c)}.$$

Используя неравенство Коши $abc \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$, получаем

$$r \cdot R \leqslant \frac{1}{2(a+b+c)} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{(a+b+c)^2}{54} = \frac{2p^2}{27},$$

т. е.

$$r \cdot R \leqslant \frac{2p^2}{27}.$$

Далее, известно, что для произвольного треугольника справедливо неравенство

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{$*$}$$

(данное неравенство можно доказать по аналогии с решением задач 255–258).

Так как $a = 2R \cdot \sin A$, $b = 2R \cdot \sin B$ и $c = 2R \cdot \sin C$, то неравенство $(*)$ принимает вид

$$\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{или}$$

$$a + b + c \leqslant 3\sqrt{3} \cdot R. \tag{$**$}$$

Поскольку $a+b+c=(2S)/r$, то из неравенства $(**)$ следует, что $(2S)/r \leqslant 3\sqrt{3}\cdot R$ или $r\cdot R \geqslant (2\sqrt{3})/9\cdot S$. Следовательно, требуемое двойное неравенство доказано.

Примечание. Двойное неравенство обращается в равенство в том и только в том случае, когда искомый треугольник является равносторонним. Тогда $r\cdot R = a^2/6$, где a — сторона треугольника.

§ 2.18. Геометрические задачи

269. В треугольнике сумма квадратов сторон равна m^2, а сумма их четвертых степеней равна n^4. Найти площадь треугольника.

Решение. Обозначим стороны BC, AC, AB треугольника ABC соответственно через a, b, c. Проведем к стороне AC высоту BK. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что точка K лежит на стороне AC. Обозначим $BK=h$ и $AK=x$.

Нетрудно видеть, что $h^2=c^2-x^2$ и $h^2=a^2-(b-x)^2$. Отсюда следует, что $c^2-x^2=a^2-(b-x)^2$ и $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}$.

Следовательно, имеет место равенство

$$h^2=c^2-x^2=c^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2. \qquad (*)$$

Известно, что площадь треугольника $S=\dfrac{bh}{2}$. Тогда с учетом равенства $(*)$ получаем

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{b^2}{4}\left(c^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2\right)= \\ &= \frac{b^2}{16b^2}(4b^2c^2-b^4-c^4-a^4-2b^2c^2+2a^2b^2+2a^2c^2)= \\ &= \frac{1}{16}(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)= \\ &= \frac{1}{16}\big((a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)\big)=\frac{1}{16}(m^4-2n^4). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает $S=\dfrac{\sqrt{m^4-2n^4}}{4}$.

270. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, если его размеры a, b, c удовлетворяют соотношению $3a+4b+10c=500$, а диагональ d равна $20\sqrt{5}$.

Решение. Для прямоугольного параллелепипеда имеет место

$$a^2+b^2+c^2=d^2.$$

Поскольку $d=20\sqrt{5}$, то $a^2+b^2+c^2=2000$.

Применим неравенство Коши—Буняковского (9), тогда

$$(3a+4b+10c)^2 \leqslant (9+16+100)(a^2+b^2+c^2)=125\cdot 2000=250000.$$

Так как по условию задачи $3a+4b+10c=500$, то примененное выше неравенство Коши—Буняковского превратилось в равенство, поэтому выполняется цепочка равенств

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{10}=k.$$

Отсюда получаем $a=3k$, $b=4k$ и $c=10k$. В таком случае из равенства $3a+4b+10c=500$ следует, что $9k+16k+100k=500$ или $k=4$. Следовательно, $a=12$, $b=16$, $\widetilde{n}=40$ и объем параллелепипеда $V=abc=7680$.

Примечание. Для установления размеров прямоугольного параллелепипеда можно использовать несколько иные рассуждения. Для этого необходимо первое уравнение системы

$$\begin{cases} 3a+4b+10c=500, \\ a^2+b^2+c^2=2000 \end{cases}$$

умножить на 8 и вычесть его из второго уравнения, тогда

$$(a-12)^2+(b-16)^2+(\widetilde{n}-40)^2=0,$$

откуда получаем $a=12$, $b=16$ и $\widetilde{n}=40$.

271. Диагонали делят трапецию на четыре треугольника. Пусть S — площадь трапеции; S_1, S_2 — площади двух треугольников, которые примыкают к основаниям. Доказать, что $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$.

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция, где AD — нижнее основание, а диагонали AC, BD пересекаются в точке O. Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD, которая пересекает продолжение основания AD в точке K. Так как

$S_{ABC} = S_{DCK}$ (основания треугольников равны $BC = DK$, а высотой каждого из этих треугольников является высота трапеции), то $S_{ABCD} = S_{ACK} = S$.

Обозначим площади треугольников COB и AOD через S_1 и S_2, соответственно. Из подобия треугольников COB, AOD и ACK следует, что $\frac{BC}{AK} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$ и $\frac{AD}{AK} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$. Так как $BCKD$ — параллелограмм, то $DK = BC$ и $AK = BC + AD$. В таком случае после сложения приведенных выше пропорций получаем $\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = 1$ или $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.

272. Доказать, что для произвольного треугольника ABC, имеет место равенство

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cdot\cos A + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cdot\cos B + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cdot\cos C = 3,$$

где a, b, c — стороны треугольника.

Решение. Согласно теореме синусов, имеем

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} \text{и} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Далее, левую часть требуемого равенства можно преобразовать следующим образом:

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cdot\cos A + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cdot\cos B + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cdot\cos C =$$

$$= \left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)\cdot\cos A + \left(\frac{\sin C}{\sin A}\frac{\sin A}{\sin C}\right)\cdot\cos B +$$

$$+ \left(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\right)\cdot\cos C =$$

$$= \frac{\sin B\cdot\cos C + \cos B\cdot\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A\cdot\cos C + \cos A\cdot\sin C}{\sin B} +$$

$$+ \frac{\sin A\cdot\cos B + \cos A\cdot\sin B}{\sin C} =$$

$$= \frac{\sin(B+C)}{\sin A} + \frac{\sin(A+C)}{\sin B} + \frac{\sin(A+B)}{\sin C} =$$

$$= \frac{\sin(\pi - A)}{\sin A} + \frac{\sin(\pi - B)}{\sin B} + \frac{\sin(\pi - C)}{\sin C} = 3.$$

Следовательно, требуемое равенство доказано.

273. Построить уравнение общей касательной, проведенной к графикам функций $y = 5\sqrt{x}$ и $y = -\frac{40}{x}$.

Решение. Уравнение искомой касательной будем искать в виде $y = kx+b$. Так как прямая $y = kx+b$ касается графиков функций $y = 5\sqrt{x}$ и $y = -\frac{40}{x}$, то справедливы соотношения $5\sqrt{x} = kx + b$ и $-\frac{40}{x} = kx + b$, которые можно переписать в виде квадратных уравнений (первое уравнение относительно $\sqrt{x}$, а второе — относительно x), т. е. $kx - 5\sqrt{x} + b = 0$ и $kx^2 + bx + 40 = 0$.

Поскольку общая касательная, проведенная к графикам функций $y = 5\sqrt{x}$ и $y = -\frac{40}{x}$, является единственной, то дискриминанты обоих квадратных уравнений должны быть одновременно равны нулю, т. е. имеет место система уравнений

$$\begin{cases} 25 - 4kb = 0, \\ b^2 - 160k = 0. \end{cases}$$

Корнями приведенной выше системы уравнений являются $k_1 = \frac{5}{8}$ и $b_1 = 10$. Значит, общая касательная, проведенной к графикам функций $y = 5\sqrt{x}$ и $y = -\frac{40}{x}$, имеет вид $y = \frac{5}{8}x + 10$.

§ 2.19. Экстремальные значения функций

274. Найти максимальное значение функции

$$F(x,y,z) = x + y + z - xy - xz - yz + xyz,$$

где $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение. Представим функцию F в равносильном виде

$$F(x,y,z) = (x-1)(y-1)(z-1) + 1. \qquad (*)$$

Так как $x^2+y^2+z^2=1$, то $x\leqslant 1$, $y\leqslant 1$, $z\leqslant 1$ и $x-1\leqslant 0$, $y-1\leqslant 0$, $z-1\leqslant 0$. В этой связи $(x-1)(y-1)(z-1)\leqslant 0$ и $F(x,y,z)\leqslant 1$

Теперь покажем, что полученная выше верхняя оценка функции $F(x,y,z)$ достижима, т. е. существуют значения x_0, y_0, z_0 такие, что $F(x_0,y_0,z_0)=1$.

Пусть $(x-1)(y-1)(z-1)=0$, тогда $x_0=1$ (это можно сделать, не нарушая общности последующих рассуждений). Поскольку $x_0=1$, то из уравнения $x^2+y^2+z^2=1$ следует, что $y^2+z^2=0$ и $y_0=z_0=0$. Так как $F(1,0,0)=1$, то $F_{\max}(x,y,z)=1$.

275. Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{x+1}.$$

Решение. Областью определения функции $y=f(x)$ являются $-1\leqslant x\leqslant 3$. Пусть $-1<x<3$, тогда для установления верхней оценки функции $f(x)$ воспользуемся неравенством Бернулли (8) и получим

$$\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{x+1}=\left(1-\frac{x}{3}\right)^{1/2}+(1+x)^{\frac{1}{6}}\leqslant 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2.$$

Поскольку

$$f(0)=2,\quad f(-1)=\frac{2}{\sqrt{3}}\quad \text{и}\quad f(3)=\sqrt[3]{2},\quad \text{то}\quad f_{\max}=f(0)=2.$$

276. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\frac{x^2}{8}+x\cdot\cos x+\cos 2x.$$

Решение. Преобразуем представление функции $y=f(x)$ следующим образом:

$$f(x)=\frac{x^2}{8}+x\cos x+2\cos^2 x-1=\left(\sqrt{2}\cos x+\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2-1.$$

Отсюда следует, что $f(x)\geqslant -1$. Покажем, что нижняя оценка функции $y=f(x)$ достижима, т. е. существует такое значение переменной x, при котором функция f принимает значение -1.

Для выполнения равенства $f(x)=-1$, необходимо, чтобы $\sqrt{2}\cos x=-\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$, т. е. $\cos x=-\dfrac{x}{4}$. Так как уравнение $\cos x=-\dfrac{x}{4}$ имеет корень (факт существования такого корня можно подтвердить графически), то $f_{\min}=-1$.

277. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=x^4+2x^2+\frac{1}{(x^2+1)^2}+5.$$

Решение. Представим функцию $y=f(x)$ в виде

$$f(x)=(x^2+1)^2+\frac{1}{(x^2+1)^2}+4. \qquad (*)$$

Принимая во внимание неравенство Коши (3), можно записать $(x^2+1)^2+\dfrac{1}{(x^2+1)^2}\geqslant 2$. Тогда из выражения $(*)$ получаем нижнюю оценку $f(x)\geqslant 6$, которая достигается функцией $y=f(x)$ тогда и только тогда, когда $x=0$. Следовательно, $f_{\min}=f(0)=6$.

278. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y)=6\sin x\cdot\cos y+2\sin x\cdot\sin y+3\cos x.$$

Решение. Применяя неравенство Коши—Буняковского (9), из выражения $f(x,y)=6\sin x\cdot\cos y+2\sin x\cdot\sin y+3\cos x$ получаем

$$\begin{aligned}f^2(x,y)&\leqslant(6^2+2^2+3^2)\cdot(\sin^2 x\cdot\cos^2 y+\sin^2 x\cdot\sin^2 y+\cos^2 x)=\\&=49\cdot(\sin^2 x\cdot(\cos^2 y+\sin^2 y)+\cos^2 x)=\\&=49\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)=49.\end{aligned}$$

Отсюда получаем $-7\leqslant f(x,y)\leqslant 7$. Теперь требуется показать, что нижняя и верхняя оценки функции $f(x,y)$ достижимы, т. е. $f_{\min}=-7$ и $f_{\max}=7$.

Для этого необходимо рассмотреть условия, при которых неравенство Коши—Буняковского (9) превращается в равенство. Таким образом, применительно к заданной функции $f(x,y)$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 6 = a\sin x\cdot\cos y,\\ 2 = a\sin x\cdot\sin y,\\ 3 = a\cos x,\end{cases} \qquad (*)$$

где a — некоторая константа.

Возведем в квадрат левые и правые части уравнений системы $(*)$, тогда после их последующего сложения получаем $a^2 = 49$.

Пусть $a = 7$, тогда из системы уравнений $(*)$ следует $\cos x = \dfrac{3}{7}$,

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\frac{9}{49}} = \pm\frac{2\sqrt{10}}{7},$$

$$\sin y = \frac{2}{7\cdot\left(\pm\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \cos y = \frac{6}{7\cdot\left(\pm\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)} = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Если $\cos x = \dfrac{3}{7}$, $\sin x = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$, $\sin y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ и $\cos y = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, то $f_{\max} = 6\cdot\dfrac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 2\cdot\dfrac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}} + 3\cdot\dfrac{3}{7} = 7.$

Если $\cos x = -\dfrac{3}{7}$, $\sin x = -\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$, $\sin y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ и $\cos y = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, то $f_{\min} = 6\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{7}\right)\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 2\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{7}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}} + 3\cdot\left(-\dfrac{3}{7}\right) = -7.$

279. Пусть $x^2+3y^2+z^2 = 2$. Найти наименьшее значение функции $f(x,y,z) = 2x+y-z$.

Решение. Воспользуемся неравенством Коши—Буняковского (9), тогда

$$f^2(x,y,z) = (2x+y-z)^2 = \left(2x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}y+(-1)\cdot z\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(4+\frac{1}{3}+1\right)\cdot(x^2+3y^2+z^2) = \frac{16}{3}\cdot 2 = \frac{32}{3}.$$

Отсюда получаем, что $|f(x,y,z)| \leqslant \dfrac{4}{3}\sqrt{6}$. Теперь покажем, что $f_{\min}(x,y,z) = -\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

Известно, что неравенство (9) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}y}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{z}{-1} = a$. Отсюда следует, что $x = 2a$, $y = \dfrac{a}{3}$ и $z = -a$. Так как $x^2+3y^2+z^2 = 2$, то $4a^2+\dfrac{a^2}{3}+a^2 = 2$ и $a = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

В таком случае

$$f_{\min}(x,y,z) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{6}}{12}\right) - \frac{\sqrt{6}}{4} = -\frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Примечание. Проведя аналогичные рассуждения, можно показать, что

$$f_{\max}(x,y,z) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{12}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

280. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x,y) = 2x+y, \quad \text{если} \quad 2x^2+y^2+2xy-6x-y = 0.$$

Решение. *Решение.* Если обозначить $2x+y = p$, то рассматриваемую задачу можно будет сформулировать следующим образом: найти минимальное и максимальное значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+2xy-6x-y = 0,\\ 2x+y = p\end{cases}$$

является совместной (т. е. имеет действительные корни).

Для этого из второго уравнения выразим $y = p-2x$ и подставим это выражение во второе уравнение системы. После этого получим квадратное уравнение относительно переменной x с параметром p вида

$$2x^2-2x(p+2)+p^2-p = 0.$$

Это уравнение имеет корни в том и только в том случае, когда его дискриминант неотрицателен, т. е. имеет место неравенство

$$(p+2)^2-2(p^2-p) \geqslant 0 \quad \text{или} \quad p^2-6p-4 \leqslant 0.$$

Решая неравенство $p^2 - 6p - 4 \leqslant 0$, получаем

$$3 - \sqrt{13} \leqslant p \leqslant 3 + \sqrt{13}.$$

Поэтому $f_{\min} = 3 - \sqrt{13}$ и $f_{\max} = 3 + \sqrt{13}$.

Примечание. Предыдущую задачу можно было бы решить несколько иначе. Из второго уравнения можно выразить $x = \dfrac{p-y}{2}$. В таком случае первое уравнение системы примет вид

$$2\left(\frac{p-y}{2}\right)^2 + y^2 + 2y\left(\frac{p-y}{2}\right) - 6\left(\frac{p-y}{2}\right) - y = 0,$$

$$\frac{p^2 - 2py + y^2}{2} + y^2 + py - y^2 - 3p + 3y - y = 0,$$

$$y^2 + 4y + p^2 - 6p = 0.$$

Квадратное уравнение относительно y имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицательный, т. е. $4 - p^2 + 6p \geqslant 0$ или $p^2 - 6p - 4 \leqslant 0$. Отсюда получаем $3 - \sqrt{13} \leqslant p \leqslant 3 + \sqrt{13}$.

Глава 3

Метод математической индукции

Метод математической индукции является одним из наиболее часто встречающихся методов в математике. Допустим требуется доказать некоторое утверждение (или формулу) $R(n)$, которое зависит от целочисленного параметра n, где $n \geqslant a$. Чаще всего в качестве n фигурируют натуральные числа. Непосредственная проверка утверждения $R(n)$ для каждого конкретного числа n невозможна, поскольку множество натуральных чисел бесконечно.

Суть метода математической индукции состоит в следующем. Первоначально необходимо убедиться в справедливости утверждения (или формулы) $R(n)$ для начального значения параметра n, т. е. необходимо убедиться в справедливости утверждения $R(a)$. Эта часть доказательства называется *базисом индукции*.

Затем предполагается, что утверждение $R(n)$ справедливо для $n = k$. Эта часть доказательства называется *индукционным предположением*.

Если после индукционного предположения будет доказано, что утверждение $R(n)$ справедливо и для $n = k + 1$, то справедливость утверждения $R(n)$ будет доказана полностью.

В ряде случаев оказывается полезным использование некоторой модификации метода математической индукции. Как и прежде, первоначально необходимо проверить справедливость $R(a)$. Затем предполагается, что утверждение $R(n)$ справедливо для всех n, которые меньше k (индукционное предположение). Затем необходимо убедиться в справедливости утверждения $R(k)$.

Ниже предлагаются задачи, решение которых осуществляется методом математической индукции.

281. Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Решение. Обозначим искомую сумму через S_n. Тогда требуется доказать, что

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \qquad (*)$$

Пусть $n = 1$. Тогда $S_1 = 1^2 = \frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$, т. е. утверждение $(*)$ справедливо при $n = 1$.

Предположим, что $(*)$ верно при $n = k$, т. е.

$$S_k = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1). \qquad (**)$$

Докажем справедливость формулы $(*)$ при $n = k+1$, т. е. докажем, что

$$S_{k+1} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3). \qquad (***)$$

Из определения S_n следует, что $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2$. Отсюда, используя индукционное предположение, получаем

$$S_{k+1} = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \\ = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).$$

Таким образом, утверждение $(***)$ доказано. Значит, формула $(*)$ верна для любого натурального числа n.

282. Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство

$$(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3. \qquad (*)$$

Решение. Обозначим левую и правую части равенства $(*)$ через R_n и S_n, соответственно. Требуется доказать, что $R_n = S_n$.

Пусть $n = 1$, тогда $R_1 = S_1 = 1$, т. е. равенство $(*)$ выполняется.

Предположим, что $R_k = S_k$. Теперь покажем, что равенство $(*)$ выполняется при $n = k+1$, т. е. $R_{k+1} = S_{k+1}$.

Имеет место цепочка преобразований

$$R_{k+1} = (1+2+\ldots+k+(k+1))^2 = \\ = R_k + 2(1+2+\ldots+k)(k+1) + (k+1)^2 = \\ = R_k + 2\cdot\frac{k(k+1)}{2}\cdot(k+1) + (k+1)^2 = \\ = R_k + (k+1)^3 = S_k + (k+1)^3 = S_{k+1}.$$

Таким образом, доказано, что $R_{k+1} = S_{k+1}$, а это означает, что равенство $(*)$ справедливо для любого натурального числа n.

283. Доказать, что сумма кубов n нечетных чисел равна $n^2(2n^2-1)$ при любом натуральном n.

Решение. По условию задачи требуется доказать равенство

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2\cdot(2n^2-1),$$

где $n \geqslant 1$.

Если обозначить искомую сумму через S_n, то требуется доказать, что

$$S_n = n^2\cdot(2n^2-1). \qquad (*)$$

Пусть $n = 1$. Тогда $S_1 = 1^3 = 1$ и $S_1 = 1^2\cdot(2\cdot1^2-1) = 1$, т. е. утверждение $(*)$ справедливо при $n = 1$.

Предположим, что равенство $(*)$ верно при $n = k$, т. е.

$$S_k = k^2\cdot(2k^2-1).$$

Докажем справедливость формулы $(*)$ при $n = k+1$, т. е.

$$S_{k+1} = (k+1)^2\cdot(2(k+1)^2-1) = 2k^4+8k^3+11k^2+6k+1. \quad (**)$$

Из определения S_n следует, что

$$S_{k+1} = S_k + (2\cdot(k+1)-1)^3 = S_k + (2k+1)^3.$$

Отсюда, используя индукционное предположение, получаем

$$S_{k+1} = k^2\cdot(2k^2-1) + (2k+1)^3 = 2k^4+8k^3+11k^2+6k+1.$$

Таким образом, утверждение $(**)$ доказано. А это означает, что формула $(*)$ верна для любого натурального числа n.

284. Доказать, что для любого натурального числа n $(n \geqslant 2)$ справедливо равенство

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{n \cdot (n^2 - 1)}{3}. \qquad (*)$$

Решение. Обозначим левую часть выражения $(*)$ через S_n.

Пусть $n = 2$. Тогда $S_2 = 1 \cdot 2 = \dfrac{2 \cdot (2^2 - 1)}{3} = 2$, т. е. равенство $(*)$ справедливо при $n = 2$.

Предположим, что равенство $(*)$ выполняется при $n = k$,

$$S_k = \frac{k(k^2 - 1)}{3}. \qquad (*)$$

Покажем, что

$$S_{k+1} = \frac{(k+1) \cdot ((k+1)^2 - 1)}{3} = \frac{(k+1) \cdot (k^2 + 2k)}{3}. \qquad (***)$$

Известно, что $S_{k+1} = S_k + k(k+1)$. Отсюда с учетом $(**)$ следует, что

$$S_{k+1} = \frac{k(k^2 - 1)}{3} + k(k+1) =$$
$$= \frac{k+1}{3} \cdot (k(k-1) + 3k) == \frac{k+1}{3} \cdot (k^2 + 2k),$$

т. е. справедливость формулы $(***)$ доказана, а вместе с ней доказано утверждение $(*)$.

Примечание. Искомую сумму можно вычислить и другими методами (см. задачу **9**.)

285. Числа Фибоначчи $F(n)$ задаются рекуррентным соотношением $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$, где $n \geqslant 1$ и $F(1) = 1$, $F(2) = 1$.

Доказать, что

$$F(1) + F(2) + \ldots + F(n) = F(n+2) - 1. \qquad (*)$$

Решение. Обозначим левую часть выражения $(*)$ через S_n.

Если $n = 1$, тогда по определению чисел Фибоначчи имеем $F(1) = 1$. С другой стороны, из формулы $(*)$ при $n = 1$ получаем

$$S_1 = F(1) = 1 \quad \text{и} \quad S_1 = F(3) - 1 = F(1) + F(2) - 1 = 1,$$

т. е. утверждение задачи $(*)$ верно при начальном значении n.

Предположим, что формула $(*)$ выполняется при $n = k$, т. е.

$$S_k = F(k+2) - 1. \qquad (**)$$

Докажем, что выражение $(*)$ справедливо и при $n = k+1$, т. е.

$$S_{k+1} = F(k+3) - 1. \qquad (***)$$

Имеет место $S_{k+1} = S_k + F(k+1)$. Принимая во внимание индукционное предположение $(**)$, можно записать

$$S_{k+1} = S_k + F(k+1) = F(k+2) - 1 + F(k+1) = F(k+3) - 1,$$

т. е. утверждение $(***)$ доказано, а вместе с ним доказано равенство $(*)$.

286. Доказать равенство

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right), \qquad (*)$$

где $n \geqslant 1$.

Решение. Левую часть выражения $(*)$ обозначим через R_n, а правую часть — через S_n.

Пусть $n = 1$, тогда $R_1 = \sqrt{2}$ и $S_1 = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, т. е. $R_1 = S_1$. Значит, формула $(*)$ справедлива при $n = 1$.

Пусть формула $(*)$ верна при $n = k$, т. е. $R_k = S_k$ или

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{k} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right). \qquad (**)$$

Докажем, что $R_{k+1} = S_{k+1}$. Для этого преобразуем выражение $(**)$ следующим образом:

$$2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{k} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) + 2,$$

$$2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{k} = 2\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) - 1\right) + 2,$$

$$2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k}=4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right),$$

$$\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k}}=\sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)},$$

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k+1}=2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right).$$

Таким образом, показано, что $R_{k+1}=S_{k+1}$. Следовательно, справедливость формулы $(*)$ доказана.

287. Доказать равенство

$$\cos\omega\cdot\cos 2\omega\cdot\cos 4\omega\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\omega=\frac{\sin 2^{n+1}\omega}{2^{n+1}\sin\omega}\qquad(*)$$

для любого целого неотрицательного числа $n\quad(n\geqslant 0)$.

Решение. Обозначим левую часть выражения $(*)$ через R_n.

Пусть $n=0$, тогда $R_0=\cos\omega$ и из равенства $(*)$ следует, что

$$R_0=\frac{\sin 2\omega}{2\sin\omega}=\frac{2\sin\omega\cdot\cos\omega}{2\sin\omega}=\cos\omega,$$

т. е. формула $(*)$ верна при $n=0$.

Предположим, что формула $(*)$ выполняется при $n=k$, т. е.

$$R_k=\frac{\sin 2^{k+1}\omega}{2^{k+1}\sin\omega}.\qquad(**)$$

Пусть $n=k+1$. Тогда из определения R_n имеем

$$R_{k+1}=R_k\cos 2^{k+1}\omega.$$

Отсюда, с учетом индукционного предположения $(**)$, следует

$$R_{k+1}=\frac{\sin 2^{k+1}\omega}{2^{k+1}\sin\omega}\cdot\cos 2^{k+1}\omega=\frac{2\sin 2^{k+1}\omega}{2^{k+2}\sin\omega}\cdot\cos 2^{k+1}\omega=\frac{\sin 2^{k+2}\omega}{2^{k+2}\sin\omega}.$$

Следовательно, равенство $(*)$ верно при $n=k+1$. Отсюда следует, что равенство $(*)$ верно для любых целых чисел $n (n\geqslant 0)$.

288. Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство

$$\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg}2x+\ldots+2^{n-1}\operatorname{tg}2^{n-1}x=\operatorname{ctg}x-2^n\operatorname{ctg}2^nx.\qquad(*)$$

Решение. Обозначим левую часть равенства $(*)$ через S_n. Тогда равенство $(*)$ можно переписать как

$$\operatorname{ctg}x-S_n=2^n\operatorname{ctg}2^nx.\qquad(**)$$

Пусть $n=1$, тогда $S_1=\operatorname{tg}x$ и равенство $(**)$ принимает вид

$$\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=2\operatorname{ctg}2x,$$

т. е. равенство $(**)$ справедливо при $n=1$.

Предположим, что формула $(**)$ справедлива при $n=k$, т. е.

$$\operatorname{ctg}x-S_k=2^k\operatorname{ctg}2^kx.\qquad(***)$$

Пусть $n=k+1$. Тогда, используя индукционное предположение $(***)$, получаем

$$\operatorname{ctg}x-S_{k+1}=(\operatorname{ctg}x-S_k)-2^k\operatorname{tg}2^kx=2^k\widetilde{n}\operatorname{tg}2^kx-2^k\operatorname{tg}2^kx=$$
$$=2^k\left(\frac{\cos 2^kx}{\sin 2^kx}-\frac{\sin 2^kx}{\cos 2^kx}\right)=2^{k+1}\operatorname{ctg}2^{k+1}x.$$

Следовательно, равенство $(**)$ верно и при $n=k+1$, Тем самым справедливость равенства $(*)$ доказана.

289. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.\qquad(*)$$

Решение. Обозначим левую часть равенства $(*)$ через S_n.

Пусть $n=1$, тогда $S_1=\dfrac{1}{a_1a_2}$ и, следовательно, равенство $(*)$ справедливо при $n=1$.

Предположим, что формула $(*)$ верна при $n=k$, т. е.

$$S_k=\frac{k}{a_1a_{k+1}}.\qquad(**)$$

Докажем справедливость утверждения $(*)$ при $n = k+1$, т. е.

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{a_1 a_{k+2}}. \qquad (***)$$

Из формулы $(*)$ вытекает, что $S_{k+1} = S_k + \dfrac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}$. Отсюда и из формулы $(**)$ следует, что

$$S_{k+1} = \frac{k}{a_1 a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}} = \frac{ka_{k+2}+a_1}{a_1 a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{k(a_{k+1}+d)+a_1}{a_1 a_{k+1} a_{k+2}} =$$
$$= \frac{ka_{k+1}+a_1+kd}{a_1 a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{ka_{k+1}+a_{k+1}}{a_1 a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{(k+1)a_{k+1}}{a_1 a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{k+1}{a_1 a_{k+2}}.$$

Отсюда следует справедливость формулы $(***)$. Отметим, что при этом доказательстве была использована формула для n — го члена арифметической прогрессии $a_n = a_r + (n-r)d$, где d — разность прогрессии и $1 \leqslant r \leqslant n$.

Из доказанной формулы $(***)$ следует справедливость равенства $(*)$ для любого натурального числа n.

290. Доказать, что для любого натурального числа n выражение $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

Решение. Обозначим выражение $4^n + 15n - 1$ через R_n.

Если $n = 1$, то $R_1 = 4 + 15 - 1 = 18$ кратно 9. Следовательно, при $n = 1$ утверждение задачи выполняется.

Предположим, что R_n кратно 9 при $n = k$.

Докажем, что R_{k+1} также делится на 9. Для этого представим R_{k+1} следующим образом:

$$R_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 =$$
$$= 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18 =$$
$$= 4R_k - 45k + 18.$$

Поскольку в силу индукционного предположения выражение R_k кратно 9, то отсюда следует, что число R_{k+1} также делится на 9.

Таким образом, утверждение задачи доказано.

291. Доказать, что произвольное число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится без остатка на 3^n.

Решение. Обозначим искомое число через R_n, т. е. $R_n = \underbrace{aa\ldots a}_{3^n}$, где a — любое целое число, принадлежащее отрезку $1 \leqslant a \leqslant 9$. Требуется доказать, что число R_n кратно 3^n.

Пусть $n = 1$, тогда число $R_1 = \underbrace{aaa}_{3}$ кратно 3, поскольку сумма составляющих его цифр равна $3a$ и эта сумма делится на 3 без остатка.

Предположим, что число R_k кратно 3^k (индукционное предположение). Покажем, что число R_{k+1} будет кратно 3^{k+1}.

По определению числа R_{k+1} имеем

$$R_{k+1} = \underbrace{aa\ldots a}_{3^{k+1}} = \underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\underbrace{aa\ldots a}_{3^k} =$$
$$= \underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\cdot(10)^{2\cdot 3^k} + \underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\cdot(10)^{3^k} + \underbrace{aa\ldots a}_{3^k} =$$
$$= \underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\cdot((10)^{2\cdot 3^k} + (10)^{3^k} + 1) =$$
$$= R_k \cdot \left((10)^{2\cdot 3^k} - 1 + (10)^{3^k} - 1 + 3\right) =$$
$$= R_k \cdot (\underbrace{99\ldots 9}_{2\cdot 3^k} + \underbrace{99\ldots 9}_{3^k} + 3).$$

Так как по индукционному предположению число R_k кратно 3^k, а число $\underbrace{99\ldots 9}_{2\cdot 3^k} + \underbrace{99\ldots 9}_{3^k} + 3$ кратно 3 (поскольку каждое его слагаемое делится на 3), то число R_{k+1} будет кратно 3^{k+1}.

На основании принципа математической индукции делаем вывод о том, что число R_n кратно 3^n для любого натурального числа n.

292. Доказать неравенство для любого натурального n $(n \geqslant 2)$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}. \qquad (*)$$

Решение. Обозначим левую часть неравенства $(*)$ через S_n.

Пусть $n = 2$, тогда $S_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12} > \dfrac{13}{24}$, т. е. неравенство $(*)$ верно при $n = 2$.

Предположим, что неравенство $(*)$ справедливо при $n = k$, т. е. $S_k > \frac{13}{24}$.

Докажем, что $S_{k+1} > \frac{13}{24}$. Из определения суммы S_n следует

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k},$$
$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Сравнивая между собой S_k и S_{k+1}, получаем

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

Очевидно, что при любом натуральном $k (k \geqslant 2)$ правая часть последнего равенства положительна. Поэтому $S_{k+1} > S_k$. Так как $S_k > \frac{13}{24}$ (индукционное предположение), то $S_{k+1} > \frac{13}{24}$. Следовательно, требуемое неравенство $(*)$ доказано.

293. Доказать неравенство Бернулли (6): если $x > -1$ и n — натуральное число, то

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx. \qquad (*)$$

Решение. Пусть $n = 1$, тогда неравенство $(*)$ превращается в тождество $1 + x = 1 + x$.

Предположим, что неравенство $(*)$ справедливо при $n = k$, т. е.

$$(1+x)^k \geqslant 1 + kx. \qquad (**)$$

Покажем, что неравенство $(*)$ выполняется также и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1 + kx + x. \qquad (***)$$

Используя индукционное предположение $(**)$, можно записать

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geqslant (1+x)(1+kx) =$$
$$= 1 + kx + x + kx^2 \geqslant 1 + kx + x,$$

т. е. неравенство $(***)$ имеет место. Значит, неравенство Бернулли (6) справедливо для любого натурального числа n.

294. Доказать, что для любого натурального числа n $(n \geqslant 3)$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}. \qquad (*)$$

Решение. Первоначально преобразуем неравенство $(*)$ путем возведения в $n(n+1)$-ю степень обеих его частей. Тогда получим неравенство $n^{n+1} > (n+1)^n$ или

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n. \qquad (**)$$

Очевидно, что неравенства $(*)$ и $(**)$ равносильны.

Пусть $n = 3$, тогда из неравенства $(**)$ следует, что

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 < 3.$$

Последнее неравенство имеет место, поскольку $64 < 81$.

Предположим, что неравенство $(**)$ справедливо при $n = k$, т. е.

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < k. \qquad (***)$$

Покажем, что $(**)$ выполняется при $n = k + 1$, т. е. докажем неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} < k + 1. \qquad (****)$$

Преобразуем левую часть неравенства $(****)$ с учетом неравенства $(***)$ следующим образом:

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k <$$
$$< \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k <$$
$$< \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)k = \frac{k^2 + 2k}{k+1} < \frac{(k+1)^2}{k+1} = k + 1.$$

Таким образом, доказано неравенство $(****)$, а вместе с ним доказана справедливость неравенств $(**)$ и $(*)$.

295. Доказать, что для любого натурального n $(n \geqslant 1)$ справедливо неравенство

$$(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n), \qquad (*)$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $n=1$, тогда неравенство $(*)$ превращается в равенство.

Пусть $n=2$, тогда неравенство $(*)$ принимает вид

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2),$$

справедливость которого следует непосредственно из неравенства Коши—Буняковского (9).

Допустим, неравенство $(*)$ верно при любых $n<k$ (индукционное предположение). Докажем его справедливость при $n=k$. Для этого рассмотрим два случая.

1) Пусть k — четное. Поскольку $k/2<k$, тогда, используя индукционное предположение и неравенство Коши—Буняковского (9)

$$(a^{k/2}+b^{\frac{k}{2}})^2 \leqslant (1^2+1^2)(a^k+b^k)=2(a^k+b^k),$$

получаем

$$(a+b)^k \leqslant ((a+b)^{k/2})^2 \leqslant (2^{\frac{k}{2}-1}\cdot(a^{\frac{k}{2}}+b^{\frac{k}{2}}))^2 =$$
$$= 2^{k-2}\cdot(a^{\frac{k}{2}}+b^{\frac{k}{2}})^2 \leqslant 2^{k-1}\cdot(a^k+b^k).$$

2) Пусть k — нечетное. Так как $\dfrac{k+1}{2}<k$, то в этом случае также можно воспользоваться индукционным предположением. Поскольку, согласно неравенству Коши—Буняковского (9), имеет место

$$\left(a^{1/2}a^{k/2}+b^{1/2}b^{k/2}\right)^2 \leqslant (a+b)(a^k+b^k),$$

то

$$(a+b)^{k+1} = \left((a+b)^{(k+1)/2}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(2^{(k+1)/2-1}\cdot\left(a^{(k+1)/2}+b^{(k+1)/2}\right)\right)^2 =$$
$$= \left(2^{(k-1)/2}\cdot\left(a^{(k+1)/2}+b^{(k+1)/2}\right)\right)^2 =$$
$$= 2^{k-1}\cdot\left(a^{1/2}a^{k/2}+b^{1/2}b^{k/2}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2^{k-1}(a+b)(a^k+b^k).$$

Таким образом, доказана справедливость неравенства $(*)$ при $n=k$. Следовательно, неравенство $(*)$ доказано для произвольного натурального числа n.

Примечание. Неравенство $(*)$ обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a=b$ или $n=1$.

296. Доказать, что число диагоналей выпуклого n — угольника равно

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}, \qquad (*)$$

где $n \geqslant 3$.

Решение. Поскольку в треугольнике нет диагоналей, то утверждение задачи справедливо при $n=3$.

Предположим, что в произвольном выпуклом $k-$угольнике имеется $D_k=\dfrac{k(k-3)}{2}$ диагоналей. Докажем, что в таком случае утверждение $(*)$ верно при $n=k+1$, т. е. во всяком выпуклом $(k+1)$-угольнике число диагоналей равно

$$D_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}. \qquad (**)$$

Пусть $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ — выпуклый $(k+1)$-угольник. Проведем в нем диагональ A_1A_k. Чтобы установить число диагоналей в $(k+1)$- угольнике $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$, необходимо подсчитать число диагоналей в k-угольнике $A_1A_2\ldots A_k$, прибавить к полученному числу $k-2$, т. е. число диагоналей в $(k+1)$-угольнике $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$, исходящих из вершины A_{k+1}, а также учесть диагональ A_1A_k. В этой связи для вычисления D_{k+1} имеет место

$$D_{k+1} = D_k+(k-2)+1 = \frac{k(k-3)}{2}+k-1 = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Итак, утверждение $(**)$ справедливо и, следовательно, формула $(*)$ справедлива для любого натурального n $(n \geqslant 3)$.

Примечание. Справедливость формулы $(*)$ можно доказать другим методом, используя при этом следующие рассуждения.

Вершины n-угольника образуют множество из n $(n \geqslant 3)$ точек плоскости, из которых никакие три точки не лежат на одной прямой. Соединяя попарно эти точки всевозможными способами, получим $C_n^2 = \dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$ отрезков, из которых n отрезков являются сторонами, а остальные — диагоналями n-угольника, т. е.

$$D_n = \frac{n\cdot(n-1)}{2} - n = \frac{n\cdot(n-3)}{2}.$$

Отметим, что здесь при доказательстве формулы $(*)$ использовалось понятие биномиального коэффициента C_n^2 — «число сочетаний из n по 2».

297. Доказать, что при натуральном $n (n \geqslant 2)$ неравенство

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \qquad (*)$$

выполняется при любых a_1, $a_2, \ldots, a_n$.

Решение. При $n = 2$ неравенство $(*)$ принимает вид верного неравенства $|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2|$.

Предположим, что неравенство $(*)$ выполняется при $n = k$, т. е.

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_k| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k|. \qquad (**)$$

Докажем, что неравенство $(*)$ имеет место и при $n = k+1$, т. е.

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}|. \quad (***)$$

Действительно, можно записать

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + a_{k+1}| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1 + a_2 + \ldots + a_k| + |a_{k+1}|.$$

Далее воспользуемся индукционным предположением $(**)$ и получим требуемое неравенство $(***)$. Значит, неравенство $(*)$ справедливо при $n \geqslant 2$.

298. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные положительные числа, причем $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$. Доказать, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n, \qquad (*)$$

где $n \geqslant 2$.

Решение. Пусть $n = 2$, тогда $x_1 x_2 = 1$. Если $x_1 \leqslant 1$, то $x_2 \geqslant 1$ (или, наоборот, если $x_1 \geqslant 1$, то $x_2 \leqslant 1$). В любом случае имеет

место неравенство $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leqslant 0$. Так как $x_1 x_2 = 1$, то отсюда следует

$$x_1 + x_2 \geqslant x_1 x_2 + 1 = 1 + 1 = 2,$$

т. е. неравенство $(*)$ выполняется.

Предположим, что неравенство $(*)$ справедливо при $n = k$.

Пусть $n = k+1$ и $x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} = 1$. Допустим, что $x_{k+1} \leqslant 1$. Поскольку $x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} = 1$, то среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ найдется хотя бы одно число, которое больше или равно 1. Не нарушая общности последующих рассуждений, будем считать, что этим числом является x_k, т. е. $x_k \geqslant 1$. Тогда

$$(x_k - 1)(x_{k+1} - 1) \leqslant 0, \quad \text{или} x_k + x_{k+1} \geqslant x_k x_{k+1} + 1. \qquad (**)$$

Если $x_{k+1} \geqslant 1$, то $x_k \leqslant 1$ и неравенство $(**)$ также будет иметь место.

По условию задачи $x_1 x_2 \ldots x_{k-1}(x_k x_{k+1}) = 1$. Отсюда, согласно индукционному предположению, следует

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geqslant k. \qquad (***)$$

Используя последовательно неравенства $(**)$ и $(***)$, получаем

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 \geqslant k+1.$$

Таким образом, показано, что утверждение задачи верно при $n = k+1$. Следовательно, неравенство $(*)$ доказано для любого натурального числа n $(n \geqslant 2)$.

299. Доказать неравенство Коши (1), т. е.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \qquad (*)$$

где a_1, a_2, ..., a_n — произвольные положительные числа.

Решение. При доказательстве неравенства Коши $(*)$ будем использовать утверждение задачи **298**.

Для этого образуем n положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n следующим образом:

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}, \quad \ldots,$$
$$x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}. \qquad (**)$$

Так как $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, то имеет место неравенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n,$$

которое с учетом $(**)$ принимает вид

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geqslant n.$$

Отсюда следует справедливость неравенства Коши (1).

Примечание. Неравенство $(*)$ будет справедливо и в том случае, когда $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, ..., $a_n \geqslant 0$. Это следует из того факта, что если хотя бы одно из неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ приравнять нулю, то неравенство $(*)$ будет очевидным.

300. Доказать, что любое целое число рублей n $(n \geqslant 8)$ можно уплатить без сдачи денежными билетами, достоинством в 3 и 5 рублей.

Решение. Пусть $n = 8$, тогда утверждение задачи справедливо, поскольку 8 руб. = 3 руб. + 5 руб.

Пусть утверждение задачи верно для k рублей, где k — целое число, большее или равное 8.

При этом возможны два случая:

1) k рублей уплачиваются одними трехрублевыми билетами;
2) k рублей уплачиваются денежными билетами, среди которых есть хотя бы один билет пятирублевого достоинства.

В первом случае трехрублевых билетов должно быть не менее трех, так как в этом случае $k > 8$. Для того, чтобы уплатить $k+1$ руб., заменим три трехрублевых билета двумя пятирублевыми.

Во втором случае для уплаты $k+1$ рубля заменим один пятирублевый билет двумя трехрублевыми.

Таким образом, мы доказали справедливость утверждения при $n = k+1$. Следовательно, утверждение задачи выполняется для произвольных чисел n, начиная с $n = 8$.

Примечание. Данную задачу можно решить другим методом.

Для любого целого числа n $(n \geqslant 8)$ имеет место одно из следующих трех представлений: $n = 3k-1$, $n = 3k$ и $n = 3k+1$, где $k = 3, 4, 5, \ldots$.

Так как $k \geqslant 3$, $n = 3k-1 = 3(k-2)+5$ и $n = 3k+1 = 3(k-3)+10$, то утверждение задачи справедливо.

Литература

1. *Азаров А. И., Барвенов С. А., Федосенко В. С.* Математика для старшеклассников: методы решения задач с параметрами. Мн.: Аверсэв, 2003.
2. *Азаров А. И., Барвенов С. А.* Математика для старшеклассников: методы решения алгебраических уравнений, неравенств и систем. Мн.: Аверсэв, 2004.
3. *Азаров А. И., Барвенов С. А., Федосенко В. С.* Математика для старшеклассников: функциональные и графические методы решения экзаменационных задач. Мн.: Аверсэв, 2004.
4. *Амелькин В. В., Рабцевич В. Л.* Задачи с параметрами. Мн.: Асар, 2004.
5. *Амелькин В. В., Филиппович К. С., Юрчук Н. И.* Экзамен по математике? Нет проблем! Мн.: ТетраСистемс, 2000.
6. *Амелькин В. В., Филиппович К. С., Юрчук Н. И.* Готовимся к экзамену по математике. Мн.: ТетраСистемс, 2001.
7. *Амелькин В. В., Филиппович К. С., Чесалин В. И., Юрчук Н. И.* Математика в экзаменационных задачах. Мн.: ТетраСистемс, 2002.
8. *Базылев Д. Ф.* 100 олимпиадных задач по математике. Мн.: ООО «НТЦ АПИ», 1997.
9. *Вакульчик П. А.* Нестандартные и олимпиадные задачи по математике. Мн.: УниверсалПресс, 2004.
10. *Готман Э. Г., Скобец З. А.* Задача одна — решения разные: геометрические задачи. М.: Просвещение, 2000.
11. *Горнштейн П. И., Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.* Экзамен по математике и его подводные рифы. М.: Илекса, 2004.
12. *Кушнир И. А.* Шедевры школьной математики (Задачи с решениями в двух книгах). Киев: Астарта, 1995.
13. *Мандрик П. А., Крахотко В. В., Репников В. И.* Математика абитуриенту. Экзамен письменный, экзамен устный, тестирование, олимпиада. Мн.: УниверсалПресс, 2005.
14. *Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И.* Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. М.: Дрофа, 2001.
15. *Петраков И. С.* Математика для любознательных. М.: Просвещение, 2000.
16. *Седракян Н. М., Авоян А. М.* Неравенства. Методы доказательства. М.: Физматлит, 2002.

17. *Супрун В. П.* Математика для старшеклассников: задачи повышенной сложности. Мн.: Аверсэв, 2002.
18. *Супрун В. П.* Математика для старшеклассников: нестандартные методы решения задач. Мн.: Аверсэв, 2003.
19. *Супрун В. П.* Математика на вступительных экзаменах в вузы. Мн.: Красико-Принт, 2002.
20. *Супрун В. П.* Уравнения и неравенства: готовимся к вступительному экзамену. Мн.: Красико-Принт, 2003.
21. *Черняк А. А.*, *Черняк Ж. А.* Олимпиады школьников по математике. Мн.: Красико-Принт, 2002.