И. К. Парно

ИНТЕГРАЛЫ

В 10 КЛАССЕ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

И. К. Парно

Интегралы

в X классе средней школы

Пособие для учителей

ИЗДАТЕЛЬСТВО
„ПРОСВЕЩЕНИЕ“
МОСКВА. 1970

$\int$

Парно И. К.

П 18 Интегралы в X классе средней школы. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1970.

104

В связи с введением в курс математики средней школы темы «Интеграл» возникла потребность в соответствующем пособии для учителя Предлагаемая брошюра содержит один из возможных вариантов изложения темы

В настоящее время, пока старшие классы занимаются по прежней программе, книга может служить пособием для факультативных занятий

6-6
160-69

517(07)

Предисловие

Новая программа по математике для средней школы *) предусматривает изучение в X классе темы «Интеграл». Ее содержание следующее.

Первообразная функция. Определенный интеграл и его применение к определению площади под кривой. Формула Ньютона — Лейбница.

В объяснительной записке к новой программе указывается, что применения интегралов к вычислению объемов и площадей поверхностей относятся к курсу геометрии.

В программе факультативных курсов (дополнительные главы и вопросы математики) тема «Интеграл» содержит следующие вопросы:

Интеграл как предел суммы. Применения в геометрии и механике. Натуральный логарифм как $\int\limits_1^a \frac{dx}{x}$. Число e и показательная функция e^x при действительном x.

В связи с введением в курс математики средней школы новой темы возникла необходимость в соответствующем пособии для учителя. В настоящем пособии предлагается один из возможных вариантов изложения темы «Интеграл» согласно новой программе. Тема эта изложена в главах II и III. Им предпосылаются в главе I следующие вопросы.

Число e. Дифференциал функции, формулы дифференцирования. Теорема о конечном приращении функции.

Эти вопросы и материал, содержащийся в книге «Производная и ее применение к исследованию функции» **), составляют вместе первую часть, а материал, изложенный в главах II и III настоящей брошюры, — вторую часть

---

*) «Математика в школе», 1967, № 1 Новые программы, стр. 4—23.

**) И. К. Парно. Производная и ее применение к исследованию функций. М., «Просвещение», 1968 В дальнейшем при ссылках на эту книгу будем называть ее кратко [Производная].

«Начал анализа», предусмотренных новой программой для средней школы.

Кроме того, такие вопросы как длина дуги плоской кривой (гл. III, § 3) и площадь поверхности вращения (гл. III, § 4) не входят в программу. Эти вопросы могут быть предложены учащимся на занятиях математического кружка.

Рукопись настоящей работы была прочитана К. А. Сибирским, сделавшим к ней весьма ценные замечания; отдельные замечания были сделаны при ознакомлении с работой также и К. Г. Спатару, Н. Х. Спатару и И. И. Барбул. Выражаю всем им свою глубокую благодарность.

Автор

Глава I

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Число e

1. Рассмотрим переменную

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Если вычислить значения этой переменной для $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$: $u_1 = 2$; $u_2 = 2{,}25$; $u_3 \approx 2{,}37$; $u_4 \approx 2{,}44$; $u_5 \approx 2{,}49$, — то заметим, что она возрастающая. Пользуясь формулой бинома Ньютона, можно доказать, что переменная u_n возрастает при любом n.

Действительно,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1) \ldots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \times$$

$$\times \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогично

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \frac{n+1}{1} \cdot \frac{1}{n+1} +$$

$$+ \frac{(n+1)\,n}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(n+1)^3} +$$

$$+ \ldots + \frac{(n+1) \cdot n\,(n-1) \ldots [n+1-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot \frac{1}{(n+1)^n} +$$

$$+ \frac{(n+1)\,n\,(n-1) \ldots (n+1-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+$$

$$+\quad+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Сравним, далее, члены первого разложения (u_n) с соответствующими членами второго разложения (u_{n+1}).

Из неравенства $n < n+1$ следует:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1};\ \frac{i}{n} > \frac{i}{n+1}\quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots);$$

$$-\frac{i}{n} < -\frac{i}{n+1};\ 1-\frac{i}{n} < 1-\frac{i}{n+1}, \qquad (1)$$

т. е.

$$1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1};\ 1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{n+1};$$

$$1-\frac{3}{n} < 1-\frac{3}{n+1}\ \text{и т. д.}$$

Поэтому

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right);$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) <$$

$$< \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right);$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right).$$

Мы видим, таким образом, что члены первого разложения (u_n), начиная с третьего, меньше соответствующих членов второго разложения (u_{n+1}) Кроме того, второе разложение имеет на один член больше, а именно добавочный член $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. Следовательно, $u_n < u_{n+1}$, т. е. переменная u_n *возрастающая*.

Докажем теперь, что эта переменная *ограничена* в своем возрастании. В самом деле, замечаем, что каждый из множителей

$$1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ \ldots,\ 1-\frac{n-1}{n}$$

в разложении u_n меньше единицы; поэтому если каждый из них заменить единицей, то каждый член в разложении u_n, начиная с третьего, увеличится, так что для любого натурального n имеем:

$$u_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Если в этом неравенстве каждый из множителей 3, 4, ..., n в знаменателе заменить числом 2, то каждый член суммы в правой части неравенства снова увеличится, и мы получим неравенство:

$$u_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда

$$u_n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right);$$

$$u_n < 1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}};$$

$$u_n < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}};$$

$$u_n < 3.$$

Таким образом, переменная u_n возрастающая и ограниченная и, следовательно, имеет конечный предел. Этот предел обозначается буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Замечания.

1) В высшей математике и в различных теоретических вопросах имеет большое значение система логарифмов с основанием e; логарифмы с основанием e называются *натуральными логарифмами*. Таким образом, натуральный

логарифм числа N есть некоторое число x, удовлетворяющее равенству $e^x = N$; иными словами, натуральным логарифмом числа N называется показатель степени, в которую нужно возвысить основание e, чтобы получить число N. Натуральный логарифм числа N обозначается символом $\ln N$.

2) Число e — иррациональное.

3) Числовое значение буквы e дается равенством

$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23538\ldots$$

4) Согласно определению $\ln N$ есть число, которое удовлетворяет равенству

$$N = e^{\ln N}. \tag{2}$$

С другой стороны, $\lg N$ есть число, удовлетворяющее равенству

$$N = 10^{\lg N}. \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) следует, что $10^{\lg N} = e^{\ln N}$.

Логарифмируя последнее равенство (сперва при основании 10, а затем при основании e), получим формулы:

$$\lg N = \ln N \lg e; \quad \ln N = \lg N \ln 10,$$

применяя которые можно вычислить десятичный логарифм числа, зная его натуральный логарифм, и обратно. Значения выражений $\lg e$ и $\ln 10$ даются равенствами

$$\lg e = 0{,}43429\,44819\,03\ldots$$
$$\ln 10 = 2{,}30258\,50929\,94\ldots$$

2. Определяя предел переменной $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, мы полагали, что n стремится к бесконечности, принимая целые положительные значения.

Предположим теперь, что в выражении $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ переменная m неограниченно возрастает ($m \to +\infty$), принимая все промежуточные действительные положительные значения. Обозначив через n наибольшее натуральное число, содержащееся в m, найдем:

$$n \leqslant m < n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{4}$$

Из этого условия вытекает:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n};$$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{m} \leqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

Отсюда, принимая во внимание условие (4), получим:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Однако *)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$
$$= e\cdot 1 = e.$$

Из этого следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

3. Предположим, наконец, что $m\to-\infty$. Полагая

$$-m = n,$$

получим:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n =$$
$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right).$$

Но если $m\to-\infty$, то $n\to+\infty$ и $(n-1)\to+\infty$, поэтому

$$\lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right] =$$
$$= e\cdot 1 = e.$$

Из предыдущего видим, что предел выражения $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, когда $|m|\to+\infty$, не зависит от знака переменной m.

4. Рассмотрим выражение $\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$, в котором Δx стре-

---

*) Если $m\to+\infty$, то и $n\to+\infty$.

мится к нулю (не обращаясь при этом в нуль) и $a \neq 1$ $(a > 0)$. Полагая $a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{m}$, найдем что

$$a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{m},$$

откуда

$$\Delta x \ln a = \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right); \ \Delta x = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\ln a}.$$

Принимая во внимание, что из $\Delta x \to 0$ следует $m \to \infty$ (и обратно), получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{m \to \infty} \frac{\frac{1}{m} \cdot \ln a}{\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \lim_{m \to \infty} \frac{\ln a}{m \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)} =$$

$$= \frac{\ln a}{\lim\limits_{m \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} = \frac{\ln a^{*)}}{\ln \lim\limits_{m \to \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a.$$

5. Рассмотрим выражение $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, в котором α стремится к нулю (не обращаясь при этом в нуль). Полагая $\frac{1}{\alpha} = m$, найдем, что

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Принимая во внимание, что из $\alpha \to 0$ следует $|m| \to +\infty$, получим:

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

6. Рассмотрим выражение $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$, в котором m стремится к бесконечности **). Полагая $\frac{x}{m} = \alpha$, найдем:

---

*) Логарифмическая функция непрерывна, поэтому имеем

$$\lim_{m \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \ln \lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

О непрерывности функции см. книгу [Производная] гл. I § 3.

**) Заметим, что в процессе предельного перехода величина x рассматривается как постоянная (изменяется только m).

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = [(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^x.$$

Однако, когда $m \to \infty$, переменная α стремится к нулю, а $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ стремится к числу e (см. п. 5), тогда, в силу непрерывности степенной функции, получим:

$$\lim_{m \to \infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

Упражнения.

1. Найти предел выражения $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$ при m, стремящемся к бесконечности.

Ответ: $\frac{1}{e}$.

2. Найти предел выражения $\left(1-\frac{x}{m}\right)^m$ при m, стремящемся к бесконечности.

Ответ: e^{-x}.

3. Найти предел выражения $(1+\sin\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ при α, стремящемся к нулю.

Ответ: e.

4. Найти предел выражения $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ при x, стремящемся к нулю.

Ответ: e^a.

5. Найти предел выражения $\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$ при α, стремящемся к единице.

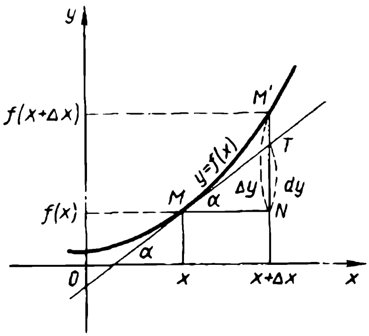
Ответ: e.

§ 2. Дифференциал

1. При решении многих задач вместо производной $f'(x)$ вводят произведение $f'(x)\cdot\Delta x$, где Δx — произвольное приращение независимой переменной x. Это произведение называют дифференциалом функции $y=f(x)$ и обозначают символом:

$$dy, \text{ или } df(x)$$

(читается «дэ игрек» или «дэ эф от икс»).



Черт. 1.

Итак, *дифференциалом функции называют произведение производной этой функции на приращение независимой переменной:*

$$dy = y' \cdot \Delta x, \text{ или}$$
$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (1)$$

Если $f(x) = x$, то согласно определению дифференциала

$$dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x,$$

т. е. ***дифференциал независимой переменной x равен приращению этой переменной:***

$$dx = \Delta x. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) найдем отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y' \cdot \Delta x}{\Delta x} = y', \text{ или } \frac{df(x)}{dx} = \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x).$$

Таким образом, отношение дифференциала функции $[dy, df(x)]$ к дифференциалу аргумента (dx) равно производной этой функции:

$$\frac{dy}{dx} = y', \text{ или } \frac{df(x)}{dx} = f'(x). \qquad (3)$$

Если заменить Δx в (1) его выражением из (2), найдем, что

$$dy = y'dx, \text{ или } df(x) = f'(x)\,dx, \qquad (4)$$

т. е. дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента.

Изменяя в (4) обозначение аргумента, получим:

$$df(u) = f'(u)\,du; \; df(t) = f'(t)\,dt$$

и т. д.

Примеры.

1) Найти дифференциал функции $f(x) = 3x^2 + 5$.

Решение. Так как: $f'(x) = (3x^2 + 5)' = 6x$, то

$$df(x) = d(3x^2 + 5) = 6xdx.$$

При $x = 1$ найдем:

$$[df(x)]_{x=1} = 6dx.$$

Полагая $dx = 0{,}01$, получим

$$[df(x)]_{\substack{x=1\\dx=0{,}01}} = 0{,}06.$$

2) $y = x^n$; $dy = nx^{n-1}dx$.

3) $y = \sin t$; $dy = \cos t\,dt$.

2) Из равенств (4) и (2) можно усмотреть геометрический смысл дифференциала функции. Пусть кривая MM_1 (черт. 1) изображает график функции $y = f(x)$, а MT — касательную в точке M к этой кривой. В треугольнике MNT катет $MN = \Delta x$, а $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ *). Следовательно,

$$NT = f'(x)\,\Delta x, \text{ или } NT = df(x),$$

т. е. NT (черт. 1) изображает дифференциал функции.

3) Из чертежа 1 видно, что $NM' = f(x + \Delta x) - f(x)$ есть приращение Δy функции $y = f(x)$, и так как для достаточно малых приращений Δx аргумента разность TM' между $NM' = \Delta y$ и $NT = dy$ очень мала по сравнению с $MN = \Delta x$, то можно считать, что приращение Δy функции $y = f(x)$ приблизительно равно ее дифференциалу dy (для малых приращений Δx) **):

$$\Delta y \approx dy, \text{ или } f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\cdot\Delta x,$$

откуда следует, что

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x. \tag{5}$$

Эту формулу в предположении, что Δx достаточно мала, используют в приближенных вычислениях.

Примеры.

1) Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ формула (5) принимает вид

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Полагая в этой формуле $x = m^2$, получим:

$$\sqrt{m^2 + \Delta x} \approx \sqrt{m^2} + \frac{1}{2\sqrt{m^2}}\Delta x,$$

---

*) [Производная], стр. 42.

**) Действительно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \dfrac{dy}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \dfrac{dy}{dx}\right) = f'(x) - f'(x) = 0.$

или

$$\sqrt{m^2 + \Delta x} \approx m + \frac{1}{2m}\cdot\Delta x. \qquad (6)$$

Пользуясь формулой (6), вычислим $\sqrt{83}$:

$$\sqrt{83} = \sqrt{81 + 2} \approx 9 + \frac{1}{2\cdot 9}\cdot 2 \approx 9{,}111.$$

Проверка: $9{,}111^2 \approx 83{,}010$.

2) Для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ формулу (5) запишем так:

$$\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\Delta x. \qquad (7)$$

Применим эту формулу для вычисления $\operatorname{tg} 46^\circ$, если известно, что $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а также, что радианная мера угла 45° равна $\frac{\pi}{4}$, а угла в 1° равна 0,0175 *).

Подставив эти значения в (7), получим:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + 1^\circ) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}0175\right) \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2\cdot 0{,}0175,$$

откуда $\operatorname{tg} 46^\circ \approx 1{,}0350$.

Проверка. В четырехзначных таблицах находим: $\operatorname{tg} 46^\circ \approx 1{,}0355$.

§ 3. Производная сложной функции

1. Рассмотрим функцию $y = f(u)$, где переменная u есть функция переменной x: $u = \varphi(x)$. В таком случае функция $u = f[\varphi(x)]$ называется сложной функцией или функцией от функции.

Примеры.

1) $y = \sin u$, где $u = ax + b$, следовательно, $y = \sin(ax + b)$, и функция y есть функция от функции.

2) $y = u^n$, где $u = \operatorname{tg} x$, следовательно, $y = (\operatorname{tg} x)^n$, и функция y есть функция от функции.

Вернемся к нашей функции $y = f[\varphi(x)]$. Пусть Δx есть некоторое приращение переменной x. Этому приращению соответствует приращение Δu функции $u = \varphi(x)$, а прира-

---

*) См «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса.

щению Δu переменной u соответствует приращение Δy функции $y = f[\varphi(x)]$.

Допустим, что:

1) Существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ при $\Delta u \to 0$, т. е. существует производная функции $y = f(u)$ по переменной u:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) = y'_u.$$

2) Существует предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ *), т. е. существует производная функции $u = \varphi(x)$ по переменной x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x) = u'_x.$$

Вычислим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, т. е. производную y'_x функции $y = f[\varphi(x)]$ по переменной x.

С этой целью напишем равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ **)}.$$

Переходя к пределу, будем иметь:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}, \tag{1}$$

или $y'_x = y'_u \cdot u'_x$,

т. е. ***производная сложной функции равна произведению производных функций $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, взятых по переменной, от которой каждая из них непосредственно зависит.***

Примеры.

1) Вычислить производную y'_x функции $y = \sin(ax + b)$.

Решение. Введем обозначение: $ax + b = u$, тогда будем иметь:

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot (ax + b)'_x = \cos u \cdot a = a\cos(ax + b).$$

2) Вычислить производную y'_x функции $y = (\cos x)^n$.

Решение. Введем обозначение: $\cos x = u$, тогда будем иметь:

$$y'_x = (u^n)'_u \cdot (\cos x)'_x = nu^{n-1} \cdot (-\sin x) = -n \sin x \cos^{n-1} x.$$

*) Следовательно, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta u \to 0$.

**) Предполагаем, что $\Delta u \neq 0$.

2. Дифференциал сложной функции. Рассмотрим функцию $y = f(u)$, где переменная u есть функция переменной x: $u = \varphi(x)$. В таком случае $y = f[\varphi(x)]$ есть сложная функция. Дифференциал этой функции по переменной x есть

$$dy = y'_x dx,$$

откуда, принимая во внимание формулу (1), найдем:

$$dy = y'_u \cdot u'_x dx;$$

но $u'_x dx$ есть дифференциал функции $u = \varphi(x)$:

$$du = u'_x dx.$$

Следовательно,

$$dy = y'_u \cdot du,$$

или

$$df(u) = f'(u)\,du. \tag{2}$$

Сравнивая эту формулу с формулой

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

видим, что формула (2) верна и в случае, когда u есть независимая переменная, и в случае, когда u есть функция переменной x.

Пользуясь формулой (2), найдем, например, что

$$du^n = nu^{n-1}du, \quad d\sin u = \cos u\,du$$

и т. д.

Применение формулы (2) значительно упрощает вычисление дифференциала сложных функций.

Примеры.

1) $d\,(5x-4)^3 = 3\,(5x-4)^2\,d\,(5x-4) = 3\,(5x-$
$-4)^2\,5dx = 15\,(5x-4)^2\,dx.$

2) $d\sqrt{\cos x} = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}}\,d\,(\cos x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}}\,(-\sin x)\,dx =$

$$= -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\,dx.$$

3. Производная показательной функции. Чтобы найти производную функции $y = a^x$ ($a \neq 1$, $a > 0$), следуем известной схеме *).

---

*) [Производная], стр 43.

1. Придаем аргументу значение x и находим соответствующее значение функции: a^x

2. Придаем аргументу значение $x+\Delta x$ и находим соответствующее значение функции. $a^{x+\Delta x}$.

3. Находим приращение функции, соответствующее приращению Δx аргумента:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

4. Находим отношение этого приращения к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

5. Находим производную функции $y = a^x$, т. е. предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \text{ *)}.$$

Однако (см. § 1, п. 4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

В частности, когда $a = e$, имеем:

$$(e^x)' = e^x \text{ **)},$$

т. е. функция e^x равна своей производной.

Если имеем функцию $y = a^u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$y_x' = (a^u)_u' \cdot u' = a^u \ln a \cdot u'.$$

Таким образом,

$$(a^u)_x' = a^u \ln a u'.$$

При $a = e$ имеем:

$$(e^u)_x' = e^u \cdot u'.$$

Примеры.

1) $(a^{\sin x})' = a^{\sin x} \cdot \ln a \cdot \cos x$.
2) $(e^{kx})' = ke^{kx}$.

---

*) В этом предельном переходе величина x рассматривается как постоянная

**) Логарифм основания равен единице $\ln e = 1$

4. **Производная логарифмической функции.** Требуется найти производную функции

$$y = \log_a x. \tag{3}$$

Равенство (3) равносильно равенству

$$a^y = x.$$

Рассматривая в этом равенстве y как функцию x, найдем производную по x каждой его части:

$$a^y \ln a \cdot y' = 1,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{a^y \ln a}, \text{ или } y' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Таким образом, мы нашли, что

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

В частности, если $a = e$, то

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Если дана функция $y = \log_a u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'.$$

В частности, если $y = \ln u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'. \tag{4}$$

Примеры.

1) $y = \log_a (2x + x^3)$; $y' = \frac{1}{\ln a} \quad \frac{1}{2x + x^3} \cdot (2x + x^3)'$;

$$y' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{2 + 3x^2}{2x + x^3}.$$

2) $y = \ln (x^3)$; $y' = \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' = \frac{3x^2}{x^3}$; $y' = \frac{3}{x}$.

5. **Производная функции $y = \arcsin x$.** Требуется найти производную функции

$$y = \arcsin x, \tag{5}$$

где $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Из равенства (5) выводим:

$$\sin y = x.$$

Найдем производную по x каждой части этого равенства:

$$\cos y \cdot y' = 1.$$

Отсюда

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \text{*)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(y \neq \pm\frac{\pi}{2},\ x \neq \pm 1 \right).$$

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

Если имеем функцию $y = \arcsin u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (|u| < 1).$$

Пример. $y = \arcsin \frac{1}{x}$; $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right);$$

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

6. **Производная функции $y = \arccos x$.** Требуется найти производную функции

$$y = \arccos x, \tag{6}$$

где $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Из равенства (6) следует:

$$\cos y = x.$$

Найдем производную по x обеих частей этого равенства:

$$-\sin y \cdot y' = 1,$$

откуда

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1^{**)}}{\sqrt{1-\cos^2 y}} =$$

---

*) В промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. в I и IV четвертях, $\cos y$ положителен, так что

$$\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}.$$

**) В промежутке $(0, \pi)$, т. е. в I и II четвертях, $\sin y$ положителен, поэтому

$$\sin y = +\sqrt{1-\cos^2 y}.$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (y \neq 0, \ \pi; \ x \neq \pm 1).$$

Итак,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (|x| < 1).$$

Если дана функция $y = \arccos u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (|u| < 1).$$

Пример.

$$y = \arccos \frac{x}{a}; \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

7. **Производная функции $y = \operatorname{arctg} x$.** Требуется найти производную функции

$$y = \operatorname{arctg} x, \tag{7}$$

где x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Из равенства (7) следует

$$\operatorname{tg} y = x.$$

Найдем производную по x от обеих частей этого равенства:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1, \text{ или } (1 + \operatorname{tg}^2 y)\, y' = 1.$$

Отсюда

$$y' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Если дана функция $y = \operatorname{arctg} u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

Пример.

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}; \quad y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' =$$

$$= \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{2+2x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

8. **Производная функции $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.** Требуется найти производную функции

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x, \tag{8}$$

где x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ и $0 < y < \pi$.

Из равенства (8) следует:

$$\operatorname{ctg} y = x.$$

Найдем производную по x обеих частей этого равенства:

$$-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1, \text{ или } -(1+\operatorname{ctg}^2 y) \cdot y' = 1,$$

откуда

$$y' = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Если дана функция $y = \operatorname{arc\,ctg} u$, где $u = \varphi(x)$, то

$$(\operatorname{arc\,ctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

Пример.

$$y = \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{2}; \quad y' = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= -\frac{4}{x^2+4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2}{x^2+4}.$$

Упражнения.

1. Найти производные следующих функций:

1. $y = e^{\frac{1}{x}}$. Ответ: $y' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

2. $y = a^{px+q}$. » $y' = pa^{px+q} \cdot \ln a$.

3. $y = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. » $y' = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

4. $y = \arcsin \frac{1}{1+x^2}$. » $y' = -\frac{2x}{|x|(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}$.

5. $y = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{x}$. » $y' = \frac{1}{-2\sqrt{x}(1+x)}$.

2. Показать, что функция e^x удовлетворяет уравнению $y' = y$.

3. Показать, что функция e^{kx} удовлетворяет уравнению $y' = ky$.

4. Показать, что функция e^{-kx} удовлетворяет уравнению $y' = -ky$.

5. Определить количество радия в любой момент времени t, если известно, что скорость распада радия пропорциональна наличному количеству радия и что в момент времени t_0 имелось R_0 граммов радия.

Решение. Обозначим через $R(t)$ количество радия, которое имелось в момент времени t. Скорость распада, т. е. скорость убывания функции $R(t)$, равна производной $R'(t)$ этой функции по переменной t. Так как скорость $R'(t)$ пропорциональна значению функции $R(t)$, то имеем:

$$R'(t) = -kR(t), \text{ или } \frac{R'(t)}{R(t)} = -k, \tag{9}$$

где $k > 0$ — постоянная величина.

Соотношение (9) можно рассматривать как полученное путем вычисления производной по t каждой части равенства

$$\ln R(t) = -kt + kC \text{ *)},$$

где C — произвольная постоянная. Из этого соотношения выводим:

$$R(t) = e^{-kt+kC} \text{ **)}.$$

Отсюда, принимая во внимание условие

$$R(t_0) = R_0,$$

получим:

$$e^{-kt_0+kC} = R_0; \quad e^{-kt_0} \cdot e^{kC} = R_0;$$

$$e^{kC} = R_0 \cdot e^{kt_0}.$$

Введя обозначение $R_0 \cdot e^{kt_0} = C_1$, найдем:

$$R(t) = C_1 e^{-kt}. \tag{10}$$

Легко убедиться, что найденная нами функция (10) удовлетворяет условию (9).

---

*) См. формулу (4).

**) Согласно определению $\ln R(t)$ есть показатель степени в которую нужно возвысить основание e, чтобы получить $R(t)$.

Действительно,

$$R'(t) = (C_1e^{-kt})' = C_1e^{-kt}(-kt)' =$$
$$= -C_1ke^{-kt} = -k(C_1e^{-kt}) = -kR(t).$$

Замечание. Уравнение (10) выражает закон изменения функции $R(t)$, согласно которому производная $R'(t)$ (скорость изменения) функции $R(t)$ пропорциональна значению этой функции.

По такому закону изменяются и многие другие величины. Например, при охлаждении какого-либо тела его температура уменьшается пропорционально разности температур этого тела и окружающей его среды.

9. Формулы производных и дифференциалов элементарных функций

I. $(C)' = 0;$	$dC = 0.$
II. $(x)' = 1;$	$d(x) = dx.$
III. $(u+v)' = u' + v';$	$d(u+v) = du + dv.$
IV. $(uv)' = uv' + vu';$	$d(uv) = udv + vdu.$
V. $(Cu)' = Cu';$	$d(Cu) = Cdu.$
VI. $(u^n)' = nu^{n-1}u';$	$d(u^n) = nu^{n-1}du.$
VII. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$	$d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$
VIII. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$
IX. $(\sin x)' = \cos x;$	$d\sin x = \cos x\,dx.$
X. $(\cos x)' = -\sin x;$	$d(\cos x) = -\sin x dx.$
XI. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}.$
XII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$
XIII. $\begin{cases} (a^x)' = a^x \ln a; \\ (e^x)' = e^x; \end{cases}$	$\begin{cases} d(a^x) = a^x \ln a\,dx. \\ d(e^x) = e^x dx. \end{cases}$
XIV. $\begin{cases} (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \\ (\ln x)' = \frac{1}{x}; \end{cases}$	$\begin{cases} d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}. \\ d(\ln x) = \frac{dx}{x}. \end{cases}$
XV. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

XVI. $(\arc\cos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad d(\arc\cos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

XVII. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\quad d(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

XVIII. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$; $\quad d(\operatorname{arc\,ctg} x) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$.

10. **Вычислить дифференциалы следующих функций:**

1. $y = ax^2 + bx + c$. Ответ: $dy = (2ax + b)\,dx$.
2. $y = (a^3 - x^3)^6$. » $dy = -18x^2(a^3 - x^3)^5\,dx$.
3. $y = \sqrt{a^2 + x^2}$. » $dy = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx$.
4. $y = \sqrt{x^2 - a^2}$. » $dy = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.
5. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. » $dy = -\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.
6. $y = (e^x + e^{-x})^2$. » $dy = 2(e^{2x} - e^{-2x})\,dx$.
7. $y = e^x \ln x$. » $dy = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)dx$.
8. $y = \sin e^x$. » $dy = e^x \cos e^x dx$.
9. $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$. » $dy = \dfrac{1}{1+x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$.
10. $y = \ln \sin^2 x$. » $dy = 2 \operatorname{ctg} x\,dx$.
11. $y = \ln \cos x$. » $dy = -\operatorname{tg} x\,dx$.
12. $y = \ln \operatorname{tg} x$. » $dy = \dfrac{1}{\sin x \cos x}\,dx$.
13. $y = \ln \operatorname{ctg} x$. » $dy = -\dfrac{1}{\sin x \cos x}\,dx$.
14. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$. » $dy = \dfrac{1}{\sin x}\,dx$.

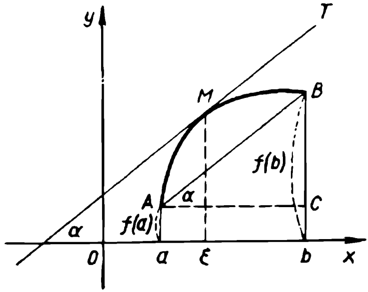
§ 4. Теорема о конечном приращении (теорема Лагранжа)

1. Допустим, что функция $y = f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$ *) и имеет производную в каждой точке этого промежутка. Пусть кривая AB (черт. 2, 3) есть

*) Промежуток $[a, b]$ есть множество всех чисел x, удовлетворяющих условию $a \leqslant x \leqslant b$.

график функции $y = f(x)$ и $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$ — соответственно координаты точек A и B. Соединим эти точки хордой AB.

В теореме о конечном приращении утверждается*), что существует на графике по крайней мере одна точка $M[\xi, f(\xi)]$, отличная от A и B, касательная в которой параллельна хорде AB.



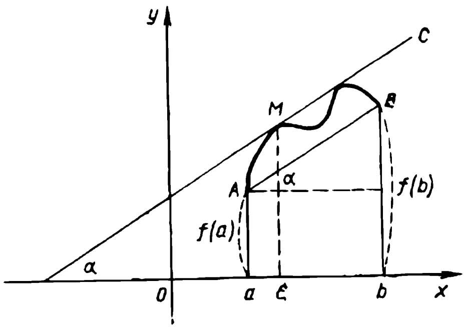
Черт. 2.

Касательная MT в точке M графика и хорда AB, будучи параллельны, имеют один и тот же угол наклона α к оси Ox. Но угловой коэффициент **) хорды AB равен

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

а угловой коэффициент ***) касательной MT равен

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(\xi).$$



Черт. 3.

Равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \qquad (1)$$

выражает тот факт, что угловой коэффициент хорды AB равен угловому коэффициенту касательной MT к кривой AB в точке $[\xi, f(\xi)]$, т. е. что $AB \parallel MT$.

*) Аналитическое доказательство теоремы заменено здесь интуитивным объяснением.

**) В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC = f(b) - f(a)$, а катет $AC = b - a$.

***) [Производная], стр. 42.

Равенство (1) представляет собой аналитическое выражение *теоремы Лагранжа*. Часто ее записывают в виде:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi) \quad (a < \xi < b).$$

2. **Следствия из теоремы о конечном приращении.** 1) ***Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ равна нулю в любой точке промежутка $[a, b]$, то функция $f(x)$ постоянна в этом промежутке****).

Действительно, пусть c и x — две произвольные точки промежутка $[a, b]$. По теореме о конечном приращении

$$f(x) - f(c) = (x - c) f'(\xi),$$

где ξ есть точка, содержащаяся между c и x. Но по условию $f'(\xi) = 0$, следовательно,

$$f(x) - f(c) = 0,$$

т. е. для любого x из $[a, b]$ имеем:

$$f(x) = f(c) = \text{const}.$$

2) ***Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют равные производные***

$$f'(x) = g'(x), \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

то они отличаются одна от другой на постоянную величину**).

Действительно, введя обозначение

$$\varphi(x) = f(x) - g(x),$$

имеем согласно условию:

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Следовательно, согласно следствию 1)

$$\varphi(x) = C \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

т. е.

$$f(x) - g(x) = C \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Пример. Функции $\arcsin x$ и $-\arccos x$ имеют равные производные:

---

*) Известно, что производная постоянной равна нулю. В следствии 1) утверждается, что справедлива и обратная теорема.

**) Известно, что из равенства $f(x) - g(x) = C$ следует $f'(x) = g'(x)$. В следствии 2) утверждается, что справедлива и обратная теорема

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$(-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Следовательно, эти функции отличаются одна от другой на постоянную величину.

Действительно, обозначим $\arcsin x$ через φ:

$$\varphi = \arcsin x \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Из этого равенства следует.

$$\sin\varphi = x. \tag{2}$$

Принимая во внимание формулу приведения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

и равенство (2), находим.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = x. \tag{3}$$

Пользуясь соотношением $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, найдем:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant -\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \varphi \leqslant \pi.$$

Следовательно, из равенства (3) получим:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \arccos x,$$

откуда:

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin x - (-\arccos x) = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, разность функций $\arcsin x$ и $-\arccos x$ равна постоянной $\frac{\pi}{2}$.

Упражнение. Функции $\operatorname{arctg} x$ и $-\operatorname{arcctg} x$ имеют равные производные. Проверить равенство

$$\operatorname{arctg} x - (-\operatorname{arcctg} x) = \frac{\pi}{2}.$$

§ 5. Краткие исторические сведения *).

Понятия переменной и функции возникли в XVII веке под влиянием запросов естествознания и техники.

Впервые ввел эти понятия Р. Декарт (1637 г.). Термин «функция» появляется (1692 г.) у Г. Лейбница, хотя и несколько в ином понимании, нежели современное.

Определение понятия функции, близкое к современному, находим у И. Бернулли (1718 г.). Это понятие получает современную общность в определениях Н. И. Лобачевского (1834 г.) и Л. Дирихле (1837 г.)

Обозначение переменных величин последними буквами латинского алфавита (x, y, z, ...) введено Р. Декартом (1637 г.), а знак функции $f(x)$ Л. Эйлером (1734 г.).

Термин limes, а также первые шаги в создании теории пределов мы находим у И. Ньютона (1686 г.). Современная теория пределов возникла в начале XIX века.

Разработкой приемов решения задач о проведении касательной к кривой занимались в начале XVII века П. Ферма и Р Декарт. В 1629 г. Ферма предложил способы нахождения наибольших и наименьших значений переменных величин. Вычисления, которые применял Ферма при решении задач о проведении касательных и об отыскании экстремумов (т. е. максимумов или минимумов функций), были равносильны вычислению производной.

Теория производных была разработана И. Ньютоном в 1665 — 1666 гг., а несколько позже (1673 — 1676 гг.) — Г. Лейбницем.

Соответствующие работы были опубликованы: Лейбница — в 1684 — 1686 гг., Ньютона — в 1704 — 1736 гг.

Операция вычисления производных была названа Лейбницем «дифференцированием».

Знак Δx был введен в 1755 г. Л. Эйлером. Ему же принадлежит (1736 г.) обозначение постоянной e (основание натуральных логарифмов).

Обозначение $\frac{dy}{dx}$ было предложено (1875 г.) Г. Лейбницем, а y', $f'(x)$ (1770, 1779 г.) — Ж. Лагранжем.

---

*) Здесь использован материал § 4 (гл. I, стр. 24) и § 7 (гл. III, стр. 97) книги [Производная].

Глава II.

ИНТЕГРАЛ

§ 1. Задача о площади криволинейной трапеции

Школьная геометрия учит нас вычислять площади плоских фигур, ограниченных отрезками прямых (треугольника, параллелограмма, трапеции, многоугольника), а из площадей плоских фигур, ограниченных кривыми линиями, вычислять только площадь круга и его частей. Однако практика требует умения вычислять и площади многих других криволинейных фигур.

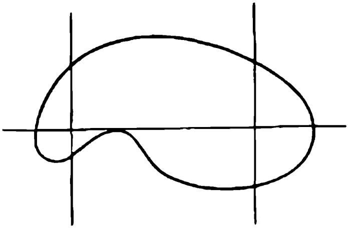
Фигура, ограниченная произвольной кривой (черт. 4), обычно может быть разбита с помощью прямых, параллельных двум перпендикулярным направлениям, на части, имеющие форму фигур, изображенных на чертежах 5, 6, 7.

Рассмотрим фигуру, называемую *криволинейной трапецией* (черт. 5). Мы видим, что у криволинейной трапеции три стороны представляют собой прямые (AA', BB', $A'B'$), а четвертая сторона (AB) — дуга произвольной кривой; две из прямолинейных сторон взаимно параллельны ($AA' \parallel BB'$) и перпендикулярны к третьей ($AA' \perp A'B'$, $BB' \perp A'B'$). Предполагается, что криволинейная сторона (AB) обладает свойством пересекаться с любой прямой, параллельной сторонам AA' и BB', не более чем в одной точке.

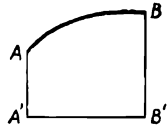
Если одна из параллельных сторон обращается в точку, криволинейная трапеция принимает форму *криволинейного треугольника* (черт. 6). Если же обе параллельные стороны обращаются каждая в точку, то криволинейная трапеция принимает форму сегмента плоской фигуры, т. е. фигуры, ограниченной какой-либо дугой и стягивающей ее хордой (черт. 7).

Таким образом, вычисление площади фигуры, ограниченной кривой линией (черт. 4), сводится к вычислению площади криволинейной трапеции.

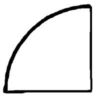
Выберем систему прямоугольных координат xOy таким образом, чтобы криволинейная трапеция $A'ABB'$ расположилась над осью Ox, а ее сторона $A'B'$ лежала на этой оси (черт. 8).



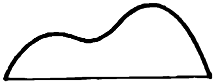
Черт. 4



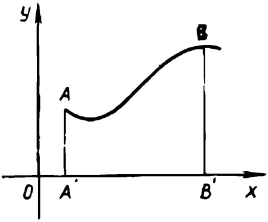
Черт. 5.



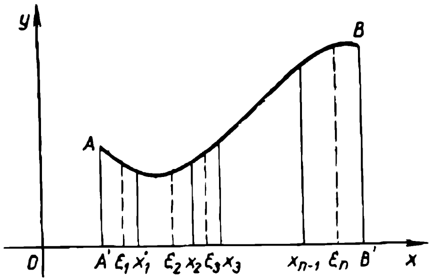
Черт. 6.



Черт. 7.



Черт. 8.



Черт. 9.

Обозначим абсциссы точек A и B соответственно через a и b $(a < b)$. Пусть имеем функцию $y = f(x)$, график которой на промежутке $[a, b]$ совпадает со стороной AB трапеции $A'ABB'$.

Ставим себе задачу — вычислить площадь криволинейной трапеции $A'ABB'$.

Для решения этой задачи разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей (промежутков), не обязательно равных; пусть абсциссы точек деления $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ удовлетворяют условию

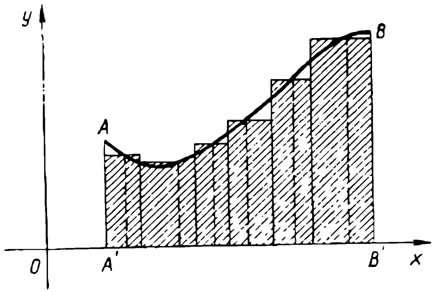
$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b.$$

Для общности обозначений положим $a = x_0$ и $b = x_n$. В каждом из промежутков

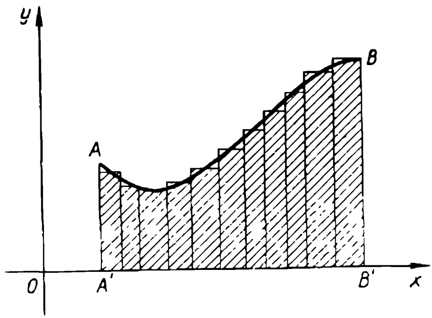
$$[x_{i-1}, \quad x_i] \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i (черт. 9), которая, следовательно, удовлетворяет условию

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i.$$



Черт. 10.



Черт. 11.

В каждой точке ξ_i (черт. 9) восставим перпендикуляр к оси Ox до пересечения со стороной AB трапеции $A'ABB'$. Принимая во внимание, что кривая AB есть график функции $y = f(x)$, найдем, что полученные нами точки пересечения имеют соответственно координаты

$$\xi_i, \ f(\xi_i).$$

Наконец, проведем через точки $[\xi_i, f(\xi_i)]$ прямые, параллельные оси Ox, и построим n прямоугольников (черт. 10) соответственно с основанием

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

высотой $f(\xi_i)$ и площадью $f(\xi_i)\,\Delta x_i$.

Сумма $f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n$, которую обозначим для краткости символом

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \\ + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n,$$

выражает площадь заштрихованной фигуры (многоугольника) ступенчатого вида (черт. 10).

Мы видим, что этот многоугольник мало отличается от криволинейной трапеции $A'ABB'$. Очевидно, разбивая промежуток $[a, b]$ на достаточно малые части (черт. 11), можно получить ступенчатые многоугольники, сколь угодно мало отличающиеся от данной нам криволинейной трапеции. Если мы будем продолжать разбиение промежутка $[a, b]$ на части все более и более мелкие и вычислять каждый раз сумму (1), то можно ожидать, что сумма (1) в этом процессе будет стремиться к определенному пределу. Естественно считать, что этот предел есть площадь криволинейной трапеции.

Описанный выше процесс предельного перехода имеет в своей основе разбиение промежутка $[a, b]$ на части все более и более мелкие. Как мы знаем, эти части (промежутки) и их длины Δx_i могут быть и неравными. Обозначим наибольшую из длин Δx_i символом «$\max \Delta x_i$.» Если в процессе разбиения промежутка $[a, b]$ на части $\max \Delta x_i$ будет стремится к нулю, то и длина каждого из промежутков

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

также будет стемиться к нулю, а число n этих промежутков будет стремиться к бесконечности.

Таким образом, обобщая понятие площади круга, известное из школьной геометрии, мы приходим к следующему определению площади криволинейной трапеции:

Если сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ *стремится, при все более и более мелком разбиении промежутка* $[a, b]$, *к некоторому пределу, то этот предел называется площадью данной криволинейной трапеции.*

Обозначив через F площадь криволинейной трапеции, мы можем, следовательно, написать:

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=n}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{2}$$

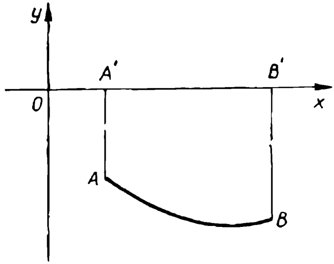
Формула (2) указывает нам тот путь, которому нужно следовать, чтобы найти площадь криволинейной трапеции.

Итак, вычисление площади трапеции свелось к отысканию предела суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ при $\max \Delta x_i$, стремящемся к нулю.

Примечание. Выше мы предполагали, что $f(x) \geqslant 0$ на промежутке $[a, b]$. Если $f(x) < 0$ для значений аргумента x из промежутка $[a, b]$, то криволинейная трапеция $A'ABB'$ расположена под осью Ox (черт. 12) и

$$f(\xi_i)\,\Delta x_i < 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

а предел

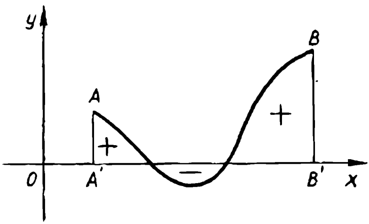


Черт. 12.

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

есть отрицательное число.

Чтобы и в этом случае предел (2) выражал площадь, условимся считать площадь трапеции, расположенной под осью, отрицательной (черт. 12).



Черт. 13.

Если $f(x)$ меняет знак в промежутке $[a, b]$ (черт. 13), то предел

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

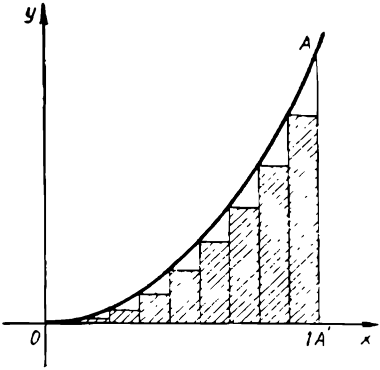
представляет собой алгебраическую сумму положительных и отрицательных площадей.

§ 2. Пример вычисления площади криволинейного треугольника

Требуется вычислить площадь криволинейного треугольника OAA' (черт. 14), ограниченного параболой $y = x^2$, осью Ox и прямой $x = 1$.

Решение. Криволинейный треугольник OAA' можно рассматривать как криволинейную трапецию, у которой одна из параллельных сторон обратилась в точку.

Чтобы вычислить площадь треугольника OAA', используем формулу (2), § 1:



Черт. 14.

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

В данном случае абсциссы точек O и A равны соответственно:

$$x_0 = 0;\ x_n = 1.$$

С целью упрощения вычислений разделим промежуток $[0,\ 1]$ точками с абсциссами:

$$x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ \ldots,$$

$$x_{i-1} = \frac{i-1}{n},\ x_i = \frac{i}{n},\ \ldots,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n}$$

на n равных частей (промежутков). В каждом из промежутков

$$[x_{i-1},\ x_i] \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i, которая, следовательно, удовлетворяет условию:

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i.$$

Вычислим площадь криволинейного треугольника OAA', полагая ξ_i равным x_{i-1}. Таким образом,

$$\xi_i = 0,\ \xi_2 = \frac{1}{n},\ \xi_3 = \frac{2}{n},\ \ldots,\ \xi_n = \frac{n-1}{n}.$$

В каждой точке ξ_i (черт. 14) восставим перпендикуляр к оси Ox до пересечения со стороной OA криволинейного треугольника OAA'. Получим точки пересечения с координатами:

$$\xi_i,\ f(\xi_i) = \xi_i^2 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

так как кривая OA в нашей задаче является параболой и имеет уравнение $y = f(x) = x^2$. Проведем через точки

ξ_i, $f(\xi_i)$ прямые, параллельные оси Ox, и построим n прямоугольников (черт. 14) соответственно с основанием

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n},$$

высотой

$$f(\xi_i) = \xi_i^2 = \frac{(i-1)^2}{n^2}$$

и площадью

$$f(\xi_i)\,\Delta x_i = \frac{(i-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}.$$

Сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= 0\cdot\frac{1}{n} + \frac{1^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \qquad + \frac{(n-1)^2}{n^2}\quad\frac{1}{n} \quad (1)$$

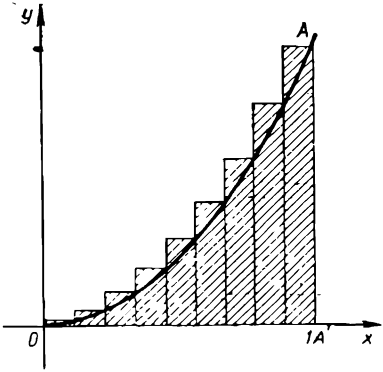
выражает площадь ступенчатого многоугольника, который **содержится** в криволинейном треугольнике OAA' (на черт. 14 этот многоугольник заштрихован). Чтобы найти площадь криволинейного треугольника OAA', нужно вычислить предел суммы S_n, когда $\max \Delta x_i$ стремится к нулю. Однако мы разбили промежуток $[0, 1]$ на равные промежутки и каждое Δx_i равно $\frac{1}{n}$, следовательно, и наибольшее из чисел Δx_i равно $\frac{1}{n}$, т. е. $\max \Delta x_i = \frac{1}{n}$. Когда $\max \Delta x_i = \frac{1}{n}$ стремится к нулю, тогда n — число частей промежутка $[0, 1]$ — стремится к бесконечности. Значит, в силу формулы (2) § 1 площадь F криволинейного треугольника OAA' равна пределу суммы (1), когда n стремится к бесконечности:

$$F = \lim_{n\to\infty}\left[0\cdot\frac{1}{n} + \frac{1^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right].$$

Чтобы вычислить этот предел, напишем сумму S_n в виде:

$$S_n = 0\cdot\frac{1}{n} + \frac{1^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2}\quad\frac{1}{n} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} =$$



Черт. 15.

$$=\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}=$$

$$=\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}\cdot\frac{1}{n^3}\text{*)}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\times$$

$$\times\frac{2n-1}{n}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times$$

$$\times\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом,

$$F=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right),$$

откуда найдем:

$$F=\frac{1}{3}.$$

Этот результат получен нами при определенном выборе точек ξ_i в каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ (см. стр. 31).

Вычислим теперь площадь криволинейного треугольника OAA', полагая ξ_i равным x_i:

$$\xi_1=\frac{1}{n},\quad \xi_2=\frac{2}{n},\quad \xi_3=\frac{3}{n},\quad \ldots,\quad \xi_n=\frac{n}{n}=1.$$

Как и выше, восставим в каждой точке ξ_i перпендикуляр к оси Ox до пересечения со стороной OA криволинейного треугольника OAA'. Через полученные таким образом точки пересечения проведем прямые, параллельные оси Ox, и построим n прямоугольников (черт. 15) соответственно

---

*) Здесь использована формула $1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$, которую можно вывести из равенства

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

если положить в нем последовательно k равным $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$ и сложить полученные равенства. В самом деле поступая так, придем к уравнению $n^3-1=3S_2+3S_1+n-1$, где $S_2=1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2$ и $S_1=1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$. Решив это уравнение относительно S_2 получим искомую формулу.

с основанием $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, высотой $f(\xi_i) = \xi_i^2 = \frac{i^2}{n^2}$ и площадью $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}$.

Сумма

$$S_n' = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \tag{2}$$

выражает площадь ступенчатого многоугольника, в котором содержится криволинейный треугольник OAA' (на черт. 15 этот многоугольник заштрихован). Площадь F криволинейного треугольника OAA' мы найдем как предел суммы (2), когда n стремится к бесконечности:

$$F = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}\right).$$

Чтобы вычислить этот предел, напишем сумму S_n' в виде:

$$S_n' = \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{1}{n^3}\,{}^{*)} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Таким образом,

$$F = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right),$$

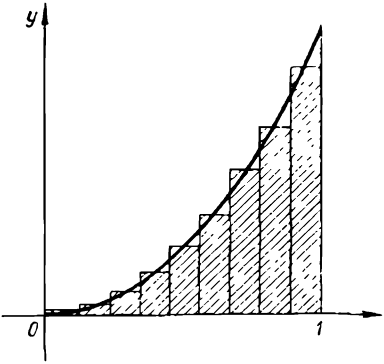
откуда

$$F = \frac{1}{3}.$$

Видим, что этот результат совпадает с полученным раньше, т. е. число $\frac{1}{3}$ есть общий предел обеих сумм S_n и S_n'.

---

*) Здесь применена формула $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$ (см. сноску на стр. 36), в которой вместо $n - 1$ подставлено n.



Черт. 16.

Покажем, наконец, что, придавая ξ_i в каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ любое другое значение, удовлетворяющее условию

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i, \qquad (3)$$

получим тот же результат.

Действительно, разделив промежуток $[0, 1]$ на n равных частей, построим, как и раньше, n прямоугольников (черт. 16) соответственно с основанием $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, высотой $f(\xi_i) = \xi_i^2$ и площадью $f(\xi_i)\Delta x_i = \xi_i^2 \cdot \frac{1}{n}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Сумма

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \cdot \frac{1}{n} =$$
$$= \xi_1^2 \cdot \frac{1}{n} + \xi_2^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \xi_n^2 \cdot \frac{1}{n}$$

выражает площадь заштрихованного на чертеже 16 многоугольника.

Из условия (3), принимая во внимание, что $x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$ и $x_i = \frac{i}{n}$, получим:

$$\frac{i-1}{n} < \xi_i < \frac{i}{n},$$

$$\frac{(i-1)^2}{n^2} < \xi_i^2 < \frac{i^2}{n^2};$$

$$\frac{(i-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} < \xi_i^2 \cdot \frac{1}{n} < \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} < \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \cdot \frac{1}{n} < \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n},$$

т. е.

$$S_n < \sigma_n < S'_n.$$

Но

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S'_n = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, и

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \frac{1}{3}.$$

Итак, $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ в случае криволинейного треугольника OAA' (черт. 14), ограниченного параболой $y = f(x) = x^2$, **не зависит** от выбора точки ξ_i в каждом из промежутков

$$[x_{i-1},\ x_i] \ (1 \leqslant i \leqslant n)$$

§ 3. Задача об определении пройденного пути по скорости

Пусть некоторая точка M движется по прямой с переменной скоростью $v = f(t)$.

Требуется найти путь, пройденный точкой M за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ $(a < b)$. Предполагается, что функция $f(t)$ непрерывна на $[a, b]$.

Чтобы решить задачу, разделим промежуток времени $[a, b]$ на n малых частей точками $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, которые удовлетворяют условию

$$a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < b.$$

Для общности обозначений положим $a = t_0$ и $b = t_n$. В каждом из промежутков

$$[t_{i-1},\ t_i] \ (1 \leqslant i \leqslant n)$$

выберем произвольным образом по точке τ_i, каждая из которых, следовательно, удовлетворяет условию $t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i$.

Скорость $v = f(t)$ мало изменяется за промежуток времени $[t_{i-1},\ t_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, длина которого $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ достаточно мала *); будем считать ее на протяжении каждого

*) Так как функция $f(t)$ непрерывна в $[a, b]$, то достаточно малым приращениям аргумента соответствуют сколь угодно малые приращения функции (см. [Производная], стр. 10)

промежутка времени $[t_{i-1}, t_i]$ постоянной и равной скорости $f(\tau_i)$ точки M в момент τ_i из этого промежутка. Другими словами, мы допускаем, что точка M за промежуток времени от $t = t_{i-1}$ до $t = t_i$ движется равномерно. Но в таком случае пройденный ею путь за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$ равен произведению скорости $[f(\tau_i)]$ на время (Δt_i).

$$f(\tau_i)\cdot\Delta t_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\,\Delta t_i = f(\tau_1)\,\Delta t_1 + f(\tau_2)\,\Delta t_2 + \qquad + f(\tau_n)\,\Delta t_n$$

выражает приближенно весь путь, пройденный точкой M за время от a до b.

Предел этой суммы, когда части $[t_{i-1}, t_i]$ в разбиении промежутка $[a, b]$ становятся сколь угодно малыми, представляет собой точное значение пути L, пройденного точкой M за промежуток времени $[a, b]$:

$$L = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\,\Delta t_i.$$

Таким образом, задача об определении пути точки, движущейся со скоростью $v = f(t)$, сводится к задаче о вычислении предела суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i)\,\Delta t_i$ при $\max \Delta t_i$, стремящемся к нулю.

§ 4. Интегральная сумма и определенный интеграл

Многие задачи геометрии, физики и других областей знания сводятся к вычислению пределов сумм вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Необходимо поэтому заняться более подробным изучением пределов таких сумм.

С этой целью изложим следующим образом содержание § 1 — 3 настоящей главы, полностью отвлекаясь при этом от соответствующей геометрической (физической) интерпретации.

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$. Выполним следующие операции:

1) разделим промежуток $[a, b]$ на части точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

и обозначим разности

$$x_i - x_{i-1} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

через Δx_i, а наибольшую из этих разностей через $\max \Delta x_i$;

2) в каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i:

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

и вычислим $f(\xi_i)$;

3) найдем произведение числа $f(\xi_i)$ и длины Δx_i соответствующего промежутка:

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i;$$

4) составим сумму этих произведений:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \qquad + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Эту сумму назовем *интегральной суммой* функции $f(x)$ для промежутка $[a, b]$;

5) будем изменять разбиение промежутка $[a, b]$ таким образом, чтобы величина $\max \Delta x_i$ стремилась к нулю, т. е. будем делить промежуток $[a, b]$ на части все более и более мелкие. Если при этом существует предел

$$\lim_{\max \Delta x_i} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

который не зависит от способа разбиения промежутка $[a, b]$ и от выбора точек ξ_i в промежутках $[x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называют *определенным интегралом функции* $f(x)$, взятым по промежутку $[a, b]$, и обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{1}$$

Символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ читается: «интеграл от a до b $f(x)\,dx$».

Примечание 1. Если $a=b$, то длины промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ равны нулю. В таком случае каждое из произведений $f(\xi_i)\Delta x_i$ равно нулю и интегральная сумма $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ также равна нулю: $S_n = 0$. Поэтому

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 0$$

и, следовательно,

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Примечание 2. Согласно определению площадь F криволинейной трапеции $A'ABB'$ (черт. 8), ограниченной осью Ox, графиком функции $y=f(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, равна пределу суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, когда $\max \Delta x_i \to 0$. Значит, согласно определению (1) эта площадь равна интегралу от a до b от $f(x)\,dx$, т. е.

$$F = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

В частности, площадь F криволинейного треугольника OAA' (фиг. 14), ограниченного параболой $y=x^2$, осью Ox и прямой $x=1$, равна интегралу от 0 до 1 от x^2dx, т. е.

$$F = \int\limits_a^1 x^2dx.$$

Знак $\int$ называется *знаком интегрирования*; число a называется *нижним пределом* интеграла, а число b — *верхним*; промежуток $[a, b]$ называется *промежутком интегрирования*; функция $f(x)$ называется *интегрируемой функцией*; выражение $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением* и, наконец, переменная x называется *переменной интегрирования*.

В подробных учебниках математического анализа доказывается, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

§ 5. Вычисление определенного интеграла

1. Свойство определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ прямым методом, т. е. путем определения предела интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ при $\max \Delta x_i \to 0$, применяется лишь в простейших случаях, так как непосредственное вычисление предела интегральной суммы — задача чрезвычайно трудная. Поэтому возникла необходимость найти другой более легкий путь вычисления определенного интеграла. Этот путь был найден. Переходим ниже к его рассмотрению.

Покажем, прежде всего, что определенный интеграл обладает весьма важным свойством.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и ее график совпадает на этом промежутке со стороной AB криволинейной трапеции $A'ABB'$ (черт. 17). Допустим, что абсцисса x точки C' — переменная величина. В таком случае с изменением величины x в промежутке $[a, b]$ изменяется и положение стороны CC' трапеции $A'ACC'$ и, следовательно, ее площадь возрастает или убывает. Другими словами, площадь криволинейной трапеции $A'ACC'$ есть функция переменной x, определяющей положение стороны CC' этой трапеции. Обозначим площадь криволинейной трапеции $A'ACC'$ как функцию x следующим образом:.

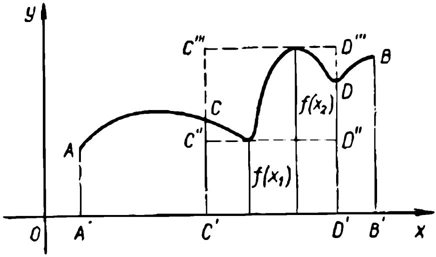
$$\text{Площ. } A'ACC' = F(x).$$

Из сказанного в § 4 (примечание 2) следует, что площадь трапеции $A'ACC'$ (черт. 17) равна определенному интегралу от a до x от $f(x)\,dx$:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx. \tag{1}$$

Докажем, что производная $F'(x)$ функции $F(x)$ равна $f(x)$, т. е. докажем следующую теорему:

Производная определенного интеграла, рассматриваемого как функция его верхнего предела, равна интегрируемой функции.



Черт. 17.

Чтобы доказать эту теорему, необходимо вычислить производную функции $F(x)$. Общая схема для вычисления производной нам известна *): придадим аргументу x приращение Δx и вычислим соответствующее приращение $\Delta F(x)$ функции; составим затем отношение $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ этих приращений и перейдем к отысканию предела этого отношения при Δx, стремящемся к нулю. Этот предел (если он существует) называется, как мы знаем, производной функции $F(x)$.

Следуя этой схеме:

1) выберем допустимое значение аргумента x (абсциссы точки C'); этому значению аргумента соответствует значение $F(x)$ функции (площадь криволинейной трапеции $A'ACC'$);

2) заменим в выражении $F(x)$ значение x аргумента значением $x+\Delta x$ **) (абсцисса точки D'); получим значение $F(x+\Delta x)$ функции (площадь криволинейной трапеции $A'ADD'$);

3) из конечного значения $F(x+\Delta x)$ функции вычтем ее начальное значение $F(x)$; получим приращение функции $\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x)$ (площадь криволинейной трапеции $C'CDD'$).

Чтобы найти величину этого приращения площади трапеции, поступим следующим образом:

найдем на промежутке $[x, x+\Delta x]$ такую точку, в которой функция $y=f(x)$ имеет наименьшее значение. Пусть $f(x_1)$ есть это наименьшее значение, где $x \leqslant x_1 \leqslant x+\Delta x$; построим прямоугольник $C'C''D''D'$ с основанием Δx, высотой $f(x_1)$ и площадью $f(x_1)\Delta x$. Найдем затем на промежутке $[x, x+\Delta x]$ такую точку, в которой функция $y=f(x)$ имеет наибольшее значение. Пусть $f(x_2)$ есть это наибольшее значение, где $x \leqslant x_2 \leqslant x+\Delta x$; построим прямо-

*) См. книгу [Производная], стр. 43.
**) Предполагаем $\Delta x > 0$.

угольник $C'C'''D'''D'$ с основанием Δx, высотой $f(x_2)$ и площадью $f(x_2)\,\Delta x$.

Сравнивая площадь $\Delta F(x)$ трапеции $C'CDD'$ с площадями $f(x_1)\,\Delta x$ и $f(x_2)\,\Delta x$ прямоугольников $C'C''D''D'$ и $C'C'''D'''D'$, видим, что имеет место соотношение

$$f(x_1)\,\Delta x < \Delta F(x) < f(x_2)\,\Delta x; \tag{2}$$

4) чтобы найти отношение приращений $\Delta F(x)$ и Δx, разделим каждую часть неравенств (2) на положительное *) Δx, получим:

$$f(x_1) < \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} < f(x_2); \tag{3}$$

5) найдем, наконец, предел отношения $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю Но при Δx, стремящемся к нулю, промежуток $[x,\ x+\Delta x]$ становится все более и более малым и точки x_1 и x_2 приближаются к точке x, а $f(x_1)$ и $f(x_2)$ стремятся к $f(x)$, т. е. имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0} x_1 = x \text{ и } \lim_{x_1\to x} f(x_1) = f(x);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} x_2 = x \text{ и } \lim_{x_2\to x} f(x_2) = f(x).$$

Что же касается отношения $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$, то оно в пределе равно производной функции $F(x)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Так как $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют один и тот же предел $f(x)$, когда Δx стремится к нулю, а отношение $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ неизменно заключено между $f(x_1)$ и $f(x_2)$ (см. неравенства 3), то отсюда следует, что предел $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ или $F'(x)$ равен общему пределу $f(x)$ величин $f(x_1)$ и $f(x_2)$, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Таким образом теорема доказана.

2. Первообразная функция. Функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ (в некотором промежутке I), назы-

*) В случае $\Delta x < 0$ рассуждая аналогично, придем к тем же неравенствам (3).

вается *первообразной* по отношению к функции $f(x)$ (в промежутке I).

Если $F(x)$ служит первообразной для $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x),$$

то функция $F(x) + C$ при любом постоянном C также является первообразной для $f(x)$, так как имеем*):

$$[F(x) + C]' = [F(x)]' + [C'] = f(x).$$

Например, функции

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3}; \; F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5; \; F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 0,7$$

и вообще функция

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — произвольная постоянная, все являются первообразными для функции $f(x) = x^2$.

Обратно: любая функция, первообразная для $f(x)$, может быть представлена в виде $F(x) + C$.

Действительно, пусть

$$\Phi'(x) = f(x) \text{ и } F'(x) = f(x),$$

тогда будем иметь:

$$\Phi'(x) = F'(x)$$

и, следовательно (глава I, § 4, п. 2, стр. 26)

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

т. е.

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

3. **Формула Ньютона — Лейбница.** Пользуясь свойством определенного интеграла, доказанным в п. 1, можно задачу об его вычислении заменить отысканием первообразной $F(x)$ для интегрируемой функции $f(x)$.

Действительно, предположим, что выполняются все условия теоремы п. 1, т. е.

1) функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и ее график есть кривая AB (черт. 18);

2) абсцисса x точки C' (черт. 18) — переменная вели-

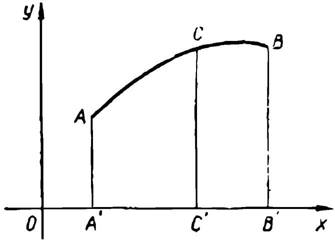
---

*) Производная постоянной равна нулю

чина на $[a, b]$; точки A' и B' имеют соответственно абсциссы a, b;

3) площадь криволинейной трапеции $A'ACC'$ равна $F(x)$ и, следовательно,

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$



Черт. 18.

Ставим себе задачу вычислить площадь трапеции $A'ABB'$, т. е. $\int_a^b f(x)\,dx$.

Из доказанного выше мы знаем, что производная $F'(x)$ функции $F(x)$ равна интегрируемой функции $f(x)$. Другими словами, функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$. Но если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную, то она имеет бесчисленное множество первообразных. Пусть функция $\Phi(x)$ — любая первообразная для $f(x)$. В таком случае (см. п. 2)

$$\Phi(x) = F(x) + C. \tag{5}$$

Положив в равенстве (5) $x = a$, будем иметь:

$$\Phi(a) = F(a) + C.$$

Но из (4) следует *):

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

следовательно,

$$\Phi(a) = C.$$

Положив в равенстве (5) $x = b$, будем иметь:

$$\Phi(b) = F(b) + C.$$

Принимая во внимание, что из (4) следует

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

*) См. (2) § 4.

получим:

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)\,dx+C,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-C=\Phi(b)-\Phi(a),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Таким образом, для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ имеем следующее правило:

1) находим для интегрируемой функции $f(x)$ какую-нибудь из ее первообразных $\Phi(x)$;

2) вычисляем значение первообразной функции $\Phi(x)$ при $x=b$, т. е. $\Phi(b)$;

3) вычисляем значение первообразной функции $\Phi(x)$ при $x=a$, т. е. $\Phi(a)$;

4) из $\Phi(b)$ вычитаем $\Phi(a)$. Разность $\Phi(b)-\Phi(a)$ изображают символом $[\Phi(x)]_a^b$ (двойная подстановка от a до b) и пишут:

$$[\Phi(x)]_a^b=\Phi(b)-\Phi(a);$$

5) записываем полученный результат:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Пример. Вычислим, пользуясь формулой Ньютона — Лейбница площадь криволинейного треугольника OAA' (черт. 14), ограниченного графиком функции $y=x^2$, осью Ox и прямой $x=1$.

Решение. В данном примере интегрируемая функция $f(x)=x^2$, а одна из ее первообразных $F(x)=\frac{x^3}{3}$ (действительно, $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$); точки O и A' имеют соответственно абсциссы 0 и 1. Следовательно,

$$\text{площадь } OAA' = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Мы видим, что этот результат совпадает с результатом, полученным нами в § 2 путем непосредственного вычисления предела суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ при $\max \Delta x_i$, стремящемся к нулю.

§ 6. Первообразная функция

1. **Первообразные элементарных функций.** В предыдущем параграфе мы ввели понятие первообразной функции и выяснили, что если функция $F(x)$ есть первообразная по отношению к функции $f(x)$ *), то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$; обратно, любая первообразная для функции $f(x)$ может быть представлена в виде $F(x) + C$.

Множество $F(x) + C$ всех первообразных функций $f(x)$ называют *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначают символом $\int f(x)\,dx$:

$$\int (x)\,dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Символ $\int f(x)\,dx$ читается: «интеграл от $f(x)\,dx$».

Разыскание для функции $f(x)$ всех ее первообразных называется интегрированием функции $f(x)$.

В равенстве (1) функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, а постоянную C — *постоянной интегрирования*.

По самому определению равенства:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{2}$$

полностью равносильны. Таким образом, любая формула устанавливающая, что производная некоторой функции $F(x)$ равна $f(x)$, непосредственно приводит к формуле для интегрирования функции $f(x)$. Поэтому из формул для производных элементарных функций (см. таблицу на стр. 23) можно составить следующую таблицу интегралов (первообразных):

---

*) Здесь и в дальнейшем предполагается, что рассматриваемые нами функции непрерывны в некотором промежутке.

1) $(C)' = 0;$	$\int 0\cdot dx = C$
2) $(x)' = 1;$	$\int 1\,dx = \int dx = x + C$
3) $(ax)' = a,$	$\int a\,dx = ax + C$
4) $\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = x^m (m \neq -1,\ x > 0);$	$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$
5) $\left(a\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = ax^m$ $(m \neq -1,\ x > 0);$	$\int ax^m dx = a\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
6) $\left(a_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + \ldots + a_n x\right)' = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n;$	$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)\,dx = a_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + \ldots + a_nx + C$
7) $\begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} \ (x > 0) \\ [\ln(-x)]' = \frac{1}{x} \ (x < 0), \end{cases}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C.$
8) $\begin{cases} \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x, \\ (e^x)' = e^x; \end{cases}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
9) $(-\cos x)' = \sin x;$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
10) $(\sin x)' = \cos x;$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
11) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
12) $(-\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x};$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
13) $\left.\begin{matrix} (\arcsin x)' \\ (-\arccos x)' \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$
14) $\left.\begin{matrix} (\operatorname{arctg} x)' \\ (-\operatorname{arcctg} x)' \end{matrix}\right\} = \frac{1}{1+x^2};$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} + C. \end{cases}$

2. **Свойства неопределенного интеграла.** Из равносильных равенств

$$F'(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{2}$$

следует:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = [F(x) + C]' = f(x),$$

т. е. производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Из равенств (2) выводим также следующее правило:

чтобы проверить справедливость равенства

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{3}$$

нужно найти производную его правой части. Если в результате получим подынтегральную функцию левой части, то, значит, равенство (3) верно.

Сказанное выше используем при доказательстве следующих двух свойств неопределенного интеграла.

Свойство I. ***Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:***

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad (a \neq 0). \tag{4}$$

Действительно, найдем производную правой части равенства (4):

$$[a\int f(x)\,dx]' = a\,[\int f(x)\,dx]' = a\,f(x).$$

Видим, что эта производная равна подынтегральной функции левой части. Следовательно, равенство (4) верно.

Свойство II. ***Интеграл от суммы функций равен сумме интегролов этих функций.*** Например,

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \\ + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx. \tag{5}$$

Действительно,

$$[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx]' = \\ = [\int f(x)\,dx]' + [\int g(x)\,dx]' - [\int h(x)\,dx]' = \\ = f(x) + g(x) - h(x).$$

Видим, что производная правой части равенства (5) совпадает с подынтегральной функцией левой части. Следовательно, равенство (5) верно. Легко убедиться, что это свойство справедливо и в случае суммы n функций.

3. **Постоянная интегрирования.** Напомним, что слагаемое C, входящее в правую часть равенства

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

является произвольной постоянной. В отношении употребления этой постоянной необходимо сделать следующие замечания.

Замечание 1. Если C_1 и C_2 — произвольные постоянные, то сумма их $C_1 + C_2$ также является произвольной постоянной и поэтому может быть записана в виде одной произвольной постоянной C:

$$C_1 + C_2 = C.$$

То же можно сказать и относительно суммы 3-х, 4-х... , n произвольных постоянных.

Принимая во внимание это замечание, можно доказать свойство II неопределенного интеграла также и следующим образом. Из равенств

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1;\ \int g(x)\,dx = G(x) + C_2;$$
$$\int h(x)\,dx = H(x) + C_3,$$

$$\text{где } F'(x) = f(x);\ G'(x) = g(x);\ H'(x) = h(x),$$

выводим:

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx = F(x) +$$
$$+ G(x) - H(x) + C_1 + C_2 - C_3,$$

или

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx = F(x) +$$
$$+ G(x) - H(x) + C. \tag{6}$$

Но

$$[F(x) + G(x) - H(x)]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) =$$
$$= f(x) + g(x) - h(x),$$

т. е. функция $[F(x) + G(x) - H(x)]$ есть первообразная для функции $[f(x) + g(x) - h(x)$. Следовательно,

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = F(x) + G(x) - H(x) + C. \tag{7}$$

Из (7) и (6) имеем:

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = \int f(x)\,dx +$$
$$+ \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx.$$

Замечание 2. Если C_1 — произвольная постоянная, то произведение aC_1, где $a \neq 0$, также является произвольной постоянной и поэтому может быть записано в виде

$$aC_1 = C,$$

где C — произвольная постоянная.

Принимая во внимание это замечание, свойство I неопределенного интеграла можно доказать также и следующим образом. Из равенства

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1,$$

где $F'(x) = f(x)$, выводим:

$$a\int f(x)\,dx = aF(x) + aC_1, \quad (a \neq 0)$$

или

$$a\int f(x)\,dx = aF(x) + C. \tag{8}$$

Но

$$[aF(x)]' = aF'(x) = af(x),$$

т. е. функция $aF(x)$ есть первообразная для функции $af(x)$. Поэтому

$$\int af(x)\,dx = aF(x) + C. \tag{9}$$

Из (9) и (8) выводим:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad (a \neq 0).$$

4. Примеры применения формул 1 — 14.

1. $\int 3x^2dx = x^3 + C.$

2. $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$

3. $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$

4. $\int (5x+3)\,dx = 5\cdot\frac{x^2}{2} + 3x + C.$

5. $\int (3x^3 - x - 1)\,dx = 3\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C.$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$

7. $\int 3\sqrt[3]{x^2}\,dx = \int 3x^{\frac{2}{3}}\,dx = 3\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C.$

9. $\int \frac{3x+5}{x} dx = \int \left(3 + \frac{5}{x}\right) dx = \int 3dx + \int \frac{5}{x} dx = 3x +$
$+ 5 \ln |x| + C.$

10. $\int \left(2\cos x - \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = \int 2\cos x dx -$
$- \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{3dx}{\sqrt{x}} = 2\sin x - \operatorname{arc\,tg} x + 6\sqrt{x} + C.$

5. **Интегрирование по частям.** Допустим, что $u = f(x)$ и $v = g(x)$ — непрерывные функции, имеющие производные в промежутке $[a, b]$.

Интегрируя обе части равенства

$$uv' + vu' = (uv)',$$

получим:

$$\int (uv' + vu')\, dx = uv + C;$$

$$\int uv'dx + \int vu'dx = uv + C,$$

откуда, учитывая, что $v'dx = dv$ и $u'dx = du$, найдем:

$$\int udv + \int vdu = uv + C,$$

или

$$\int \boldsymbol{udv = uv - \int vdu}. \qquad (10)$$

В этой формуле предполагается, что постоянная интегрирования включена в символ $\int vdu$. С помощью формулы (10) вычисление интеграла $\int udv$ сводится к вычислению интеграла $\int vdu$, который возможно берется легче. Такой способ называется *интегрированием по частям*.

Примеры.

1) Найдем $\int \ln x dx$.

Решение. Положим $\ln x = u$ и $x = v$, откуда $dx = dv$. Применяя формулу (10) и учитывая, что $d \ln x = \frac{1}{x} dx$, получим:

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx =$$
$$= x \ln x - x + C.$$

2) Найти $\int xe^x dx$.

Решение. Положим $x = u$ и $e^x = v$, откуда $e^x dx = dv$. Применим интегрирование по частям:

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

3) Найти $\int x \sin x dx$.

Решение. Положим $x = u$ и $-\cos x = v$, откуда $\sin x dx = dv$. Применим формулу (10):

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx =$$
$$= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

4) Найти $\int \cos^2 x dx$.

Решение. Положим $\cos x = u$ и $\sin x = v$, откуда

$$-\sin x dx = du \text{ и } \cos x dx = dv.$$

Применим формулу (10):

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cos x - \int \sin x (-\sin x) dx =$$
$$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx =$$
$$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx =$$
$$= \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx.$$

Отсюда

$$2 \int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int dx,$$

или

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C^{*}).$$

6. **Интегрирование подстановкой.** 1) Допустим, что требуется найти $\int \sin (x + a) dx$. Путем замены переменной

$$x + a = t,$$

откуда

$$dt = d(x + a) = dx,$$

получим под знаком интеграла функцию, первообразную которой мы знаем. Действительно,

$$\int \sin (x + a) dx = \int \sin t dt = -\cos t + C =$$
$$= -\cos (x + a) + C.$$

2) Найти $\int (3x + 5)^{10} dx$.

Путем подстановки (замены переменной)

$$3x + 5 = t,$$

откуда

---

*) Этот же результат можно получить и иным путем (см. упражнение 3, стр. 56)

$$dt = d(3x + 5) = 3dx; \; dx = \frac{1}{3} dt,$$

получим:

$$\int (3x + 5)^{10} dx = \int t^{10} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^{10} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{33} (3x + 5)^{11} + C.$$

3) Найти $\int \cos^2 x dx$.

Имеем:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

поэтому

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos 2x dx \right).$$

Чтобы вычислить последний интеграл, положим $2x = t$. Отсюда

$$2dx = dt; \; dx = \frac{1}{2} dt.$$

Следовательно,

$$\int \cos 2x dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sin t + C_1 = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1 =$$

$$= \sin x \cos x + C_1.$$

Таким образом,

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos 2x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (x + C_2 + \sin x \cos x + C_1) =$$

$$= \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C,$$

где $C = \frac{1}{2} (C_1 + C_2)$.

Итак,

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C,$$

т. е. мы получили тот же результат, что и в упражнении 4, стр. 56.

4) Найти $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$.

Так как $\sin x dx = -d \cos x$, имеем:

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x},$$

Положив $\cos x = u$, найдем:

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C =$$
$$= -\ln|\cos x| + C.$$

5. Найти $\int \operatorname{ctg} x dx$.

Аналогично предыдущему, полагая $\sin x = u$, найдем:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} =$$
$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C.$$

6. Найти $\int \frac{x dx}{1+x}$.

Положив $1 + x = t$, имеем:

$$x = t - 1, \ dx = dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x dx}{1+x} = \int \frac{t-1}{t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt =$$
$$= \int dt - \int \frac{dt}{t} = t - \ln|t| + C_1 =$$
$$= 1 + x - \ln|1+x| + C_1 = x - \ln|1+x| +$$
$$+ (1 + C_1) = x - \ln|1+x| + C,$$

где $C = 1 + C_1$.

7. Найти $\int \frac{x dx}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

Положив $\sqrt{1+x^2} = u$, имеем:

$$du = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x dx}{u} \text{ и } x dx = u du.$$

Следовательно,

$$\int \frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{udu^{*)}}{1+u} = u - \ln|1+u| + C =$$
$$= \sqrt{1+x^2} - \ln(1+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

8. Найти $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

Положив $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, имеем: $dx = \cos t dt$. Следовательно,

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt\ ^{**)} =$$
$$= \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + C =$$
$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

9. Найти $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$, $a > 0$.

Положив $x = au$, имеем:

$$dx = adu \text{ и } u = \frac{x}{a}.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2u^2}\, adu = \int a^2 \sqrt{1-u^2}\, du =$$
$$= a^2 \int \sqrt{1-u^2}\, du = a^2 \cdot \frac{1}{2}(\arcsin u + u\sqrt{1-u^2}) + C =$$
$$= a^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C.$$

Упражнения.

1. $\int x^5 dx$. Ответ: $\frac{1}{6}x^6 + C$.
2. $\int 4x^3 dx$. » $x^4 + C$.
3. $\int (mx^2 + nx + p)\, dx$. » $\frac{m}{3}x^3 + \frac{n}{2}x^2 + px + C$.
4. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. » $\sqrt{x} + C$.

---

*) См пример 6, стр. 57.
**) См пример 4, стр. 55.

5. $\int \frac{dx}{x \pm a}$. Ответ: $\ln(x \pm a) + C$.

6. $\int \frac{x\,dx}{1 + x^2}$. » $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$.

7. $\int \frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2}$. » $\frac{1}{2} \ln(x^2 \pm a^2) + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx}}$. » $\frac{2}{b} \sqrt{a + bx} + C$.

9. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. » $-\sqrt{a^2 - x^2} + C$.

10. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. » $\sqrt{a^2 + x^2} + C$.

11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. » $\sqrt{x^2 - a^2} + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$. » $\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$. » $\arcsin \frac{x}{a} + C$.

14. $\int \sin kx\,dx$. » $-\frac{1}{k} \cos kx + C$.

15. $\int \cos kx\,dx$. » $\frac{1}{k} \sin kx + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$ » $\ln|\operatorname{tg} x| + C = -\ln|\operatorname{ctg} x| + C$

17. $\int \frac{dx}{\sin x}$. » $\ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C = -\ln\left|\operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{\cos x}$. » $-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C = \ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C$.

19. $\int e^{kx}\,dx$. » $\frac{1}{k} e^{kx} + C$.

20. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x + 1}$. » $\ln(e^x + 1) + C$.

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}$. Ответ: $\frac{1}{a} \arcsin(ax) + C$.

22. $\int xe^{kx}\,dx$. » $\frac{xe^{kx}}{k} - \frac{e^{kx}}{k^2} + C$.

23. $\int \arcsin x\,dx$, » $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

§ 7. Свойства определенных интегралов

1. В § 4 была выведена формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a),$$

где $f(x)$ — функция, непрерывная в промежутке $[a, b]$, а $F(x)$ — функция, первообразная для $f(x)$. Определяя интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, мы предположили, что $a < b$ (см. § 3). Однако легко заметить, что правая часть в формуле Ньютона — Лейбница имеет вполне определенный смысл и при $a \geqslant b$. Поэтому в случае $a \geqslant b$ можно ввести следующее определение. Допустим, что $f(x)$ — функция, непрерывная в $[a, b]$. Тогда полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Из (1) в случае $a = b$ имеем:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad (2)$$

что соответствует геометрическому смыслу определенного интеграла, так как в случае $a = b$ параллельные стороны криволинейной трапеции совпадают и ее площадь равна нулю. Равенство (2) можно сформулировать следующим образом: если пределы интеграла совпадают, то интеграл равен нулю *).

*) См. также примечание 1, стр. 42.

В случае $a > b$ из (1) имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{3}$$

Действительно,

$$-\int_b^a f(x)\,dx = -[F(a) - F(b)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Равенство (3) можно сформулировать следующим образом: ***если переставить между собой пределы интеграла, то знак интеграла меняется на обратный.***

Из изложенного выше следует, что символ $\int_a^b f(x)\,dx$ имеет вполне определенный смысл независимо от того, будет ли $a < b$ или $a \geqslant b$.

Пользуясь свойствами неопределенного интеграла (§ 6, п. 2), выведем аналогичные свойства определенного интеграла.

Свойство I. ***Постоянный множитель можно вывести за знак интеграла:***

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Действительно, допустим, что функция $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, т. е.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Тогда

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx = k[F(x) + C] =$$
$$= kF(x) + kC = kF(x) + C_1 \quad (k \neq 0)$$

и, следовательно,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \Big[kF(x)\Big]_a^b = kF(b) - kF(a) =$$

$$= k[F(b) - F(a)] = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

В частности, при $k = -1$ имеем:

$$\int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Легко проверить, что формула (4) справедлива и при $k = 0$.

Свойство II. ***Интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых:***

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (5)$$

Действительно, пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, т. е.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1 \text{ и } \int g(x)\,dx = G(x) + C_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int [f(x) + g(x)]\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \\ &= [F(x) + C_1] + [G(x) + C_2] = \\ &= F(x) + G(x) + (C_1 + C_2) = \\ &= F(x) + G(x) + C\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \Big[F(x) + G(x)\Big]_a^b = \\ &= [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] = \\ &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Легко убедиться, что это свойство справедливо и для суммы n слагаемых.

Свойство III. ***Допустим, что $f(x)$ — функция непрерывная в некотором промежутке I. Если a, b, c — точки этого промежутка, то***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Действительно, из равенства

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

получим:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^c + \Big[F(x)\Big]_c^b =$$

$$= [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) -$$

$$- F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Опираясь на доказанные выше свойства определенных интегралов, решим следующие примеры:

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x dx = -3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)\,dx = 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin x)\,dx =$$

$$= 3\Big[\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 3\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = 3;$$

$$2)\ \int_1^2 \frac{2x^2 + x + 1}{x}\,dx = \int_1^2 \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= 2\int_1^2 xdx + \int_1^2 dx + \int_1^2 \frac{dx}{x} =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \Big[x\Big]_1^2 + \Big[\ln x\Big|_1^2 =$$

$$= 2\left(2 - \frac{1}{2}\right) + (2 - 1) + (\ln 2 - \ln 1) = 4 + \ln 2;$$

3) проверить равенство:

$$\int_a^b 3x^2dx = \int_a^c 3x^2dx + \int_c^b 3x^2dx.$$

Решение.

$$\int_a^b 3x^2dx = [x^3]_a^b = b^3 - a^3.$$

$$\int_a^c 3x^2dx + \int_c^b 3x^2dx = [x^3]_a^c + [x^3]_c^b = (c^3 - a^3) +$$

$$+ (b^3 - c^3) = b^3 - a^3.$$

3. Пользуясь результатами, полученными при решении примеров 4, 5, § 5, вычислим следующие интегралы:

$$1)\ \int_1^2 \ln x\,dx = [x\ \ln x - x]_1^2 = (2\cdot\ln 2 - 2) - (1\cdot\ln 1 - - 1) = 2\ \ln 2 - 2 + 1 = -1 + \ln 4;$$

$$2)\ \int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = (1\cdot e - e) - (0\cdot e^0 - e^0) = = 0 + 1 = 1;$$

$$3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ \sin x dx = [-x\ \cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = = \left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) - (0\cdot\cos 0 + \sin 0) = 1;$$

$$4)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx = [-\ln\ \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\cos\frac{\pi}{3} + \ln\cos 0 = = -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = -\ln\frac{1}{2} = -(\ln 1 - \ln 2) = \ln 2;$$

$$5)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin 1 + 1\cdot\sqrt{1-1^2}) - \frac{1}{2}(\arcsin 0 + 0\cdot\sqrt{1-0}) = = \frac{1}{2}\arcsin 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int_1^3 5dx,$ Ответ: 10.

2) $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x + 1\right) dx,$ » 2,5.

3) $\int_0^2 3x^2 dx,$ » 8.

4) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx,$ » $\ln 2$.

5) $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx,$ » $2.$

6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$ » $1.$

7) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$ » $\frac{\pi}{6}.$

8) $\int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx,$ » $\frac{\pi}{4}.$

9) $\int\limits_0^{1} \frac{xdx}{1+x^2},$ » $\frac{1}{2}\ln 2.$

10) $\int\limits_{-1}^{1} \arcsin x dx.$ » $0.$

Глава III

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Вычисление площадей

Допустим, что $f(x)$ — функция, непрерывная в промежутке $[a, b]$, и что $f(x) \geqslant 0$. Из изложенного в § 1 и 4 мы знаем, что площадь F фигуры $A'ABB'$, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (черт. 8), равна интегралу от a до b от $f(x)\,dx$:

$$F = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Рассмотрим ниже несколько примеров вычисления площадей.

1 *Вычислить площадь криволинейного треугольника OAA', ограниченного параболой $y = x^2$, осью Ox и прямой $x = a$* (черт. 19).

Решение. $F = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}$.

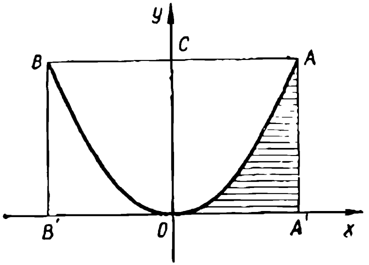
Замечание. Видим, что площадь $\frac{a^3}{3}$ криволинейного треугольника OAA' равна одной трети площади a^3 прямоугольника $COA'A$ *). Отсюда следует, что площадь криволинейного треугольника COA равна двум третям площади этого прямоугольника. Принимая во внимание, что фигура BOA симметрична относительно оси Oy, найдем, что площадь параболического сегмента BOA равна двум третям площади прямоугольника $B'BAA'$.

2. *Вычислить площадь круга.*

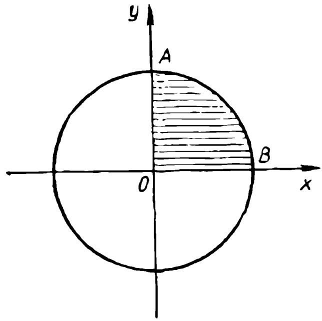
Решение. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале системы координат (черт. 20) есть $x^2 + y^2 = R^2$. Из этого уравнения найдем:

---

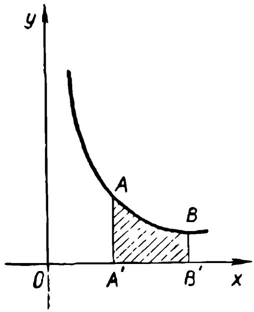
*) Точка A параболы имеет координаты a, a^2, следовательно, площадь прямоугольника $COA'A$ равна $OA' \cdot A'A = a \cdot a^2 = a^3$.



Черт. 19



Черт. 20.



Черт. 21.

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2},$$

а для части окружности, расположенной над осью Ox, получим:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Площадь четверти круга OAB равна

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

Используя результат, полученный в примере 9 (§ 6, п. 6, стр. 59), найдем:

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[R^2 \arcsin\frac{x}{R} + x\sqrt{R^2 - x^2}\right]_0^R =$$

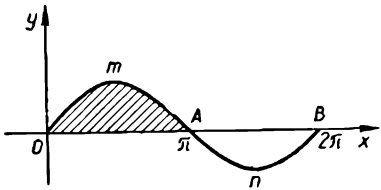
$$= \frac{1}{2}\left(R^2 \arcsin 1 + R\sqrt{R^2 - R^2}\right) - \frac{1}{2}\left(R^2 \arcsin 0 +\right.$$

$$\left.+ 0\cdot\sqrt{R^2 - 0}\right) = \frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}R^2.$$

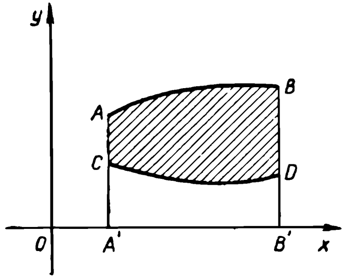
Следовательно, площадь круга равна πR^2.

3. *Вычислить площадь криволинейной трапеции $A'ABB'$* (черт. 21), *ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = a > 1$.*

Решение. $F = \int_1^a \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^a = \ln a - \ln 1 = \ln a.$



Черт. 22.



Черт. 23.

Итак, площадь под кривой $y = \frac{1}{x}$ в пределах от $x = 1$ до $x = a$ выражается числом $\ln a$.

4. *Вычислить площадь F_1 фигуры $OmAO$, ограниченной дугой OA синусоиды $y = \sin x$ и осью Ox* (черт. 22).

Решение. $F_1 = \int\limits_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi +$

$$+ \cos 0 = -(-1) + 1 = 2.$$

Замечание 1. Площадь F_2 фигуры $AnBA$, ограниченной дугой AB синусоиды $y = \sin x$ и осью Ox выразится отрицательным числом, так как эта фигура расположена под осью Ox.

Действительно,

$$F_2 = \int\limits_\pi^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos\pi =$$

$$= -1 - 1 = -2.$$

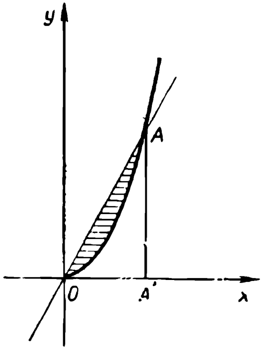
Замечание 2. Абсолютная величина этой площади, т. е. $-2| = 2$, выражает площадь фигуры $AnBA$ в смысле, известном из геометрии *).

Если вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой $OmAnB$ синусоиды $y = \sin x$ и осью Ox, то получим в результате число нуль:

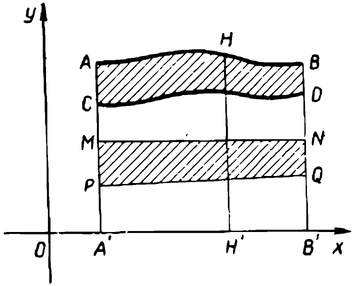
$$\int\limits_0^{2\pi} \sin x dx = \int\limits_0^\pi \sin x dx + \int\limits_\pi^{2\pi} \sin x dx = 2 + (-2) = 0,$$

т. е. алгебраическую сумму площадей F_1 и F_2.

*) В геометрии площадь — это действительное неотрицательное число, которое получается в результате измерения фигуры квадратной единицей.



Черт. 24.



Черт. 25.

Замечание 3. Сумма $2+|-2|=4$ выражает площадь фигуры $OmAnBO$ в смысле, известном из геометрии.

5. *Вычислить площадь F фигуры $CABD$* (черт. 23), *ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ и $y=g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — функции, непрерывные в промежутке $[a, b]$ и удовлетворяют условиям:*

$$f(x) \geqslant 0, \quad g(x) \geqslant 0, \quad f(x) > g(x).$$

Решение. Площадь фигуры $CABD$ получим, если из площади криволинейной трапеции $A'ABB'$ вычтем площадь криволинейной трапеции $A'CDB'$, следовательно,

$$F = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \qquad (1)$$

Пример. Вычислить площадь F фигуры, ограниченной прямой $y=2x$ и параболой $y=x^2$ (черт. 24).

Решение. Найдем сперва точки пересечения прямой $y=2x$ и параболы $y=x^2$. Для этого решим систему уравнений:

$$y = 2x; \quad y = x^2.$$

Получим точки $O(0;\ 0)$ и $A(2;\ 4)$. Следовательно, имеем:

$$F = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left[2\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\cdot\frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Тот же результат получим, если из площади прямоугольного треугольника OAA', равной $\frac{2 \cdot 4}{2}$, вычтем площадь криволинейного треугольника OAA', равную

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Возвращаясь к формуле (1), обозначим в ней разность $f(x) - g(x)$ через $h(x)$:

$$f(x) - g(x) = h(x).$$

Тогда формула (1) примет вид:

$$F = \int_a^b h(x)\, dx. \qquad (2)$$

Замечаем, что $h(x)$, будучи разностью ординат $f(x)$ и $g(x)$, представляет длину отрезка, параллельного оси Oy, заключенного между графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Из формулы (2) видим, что площадь F не зависит от формы соответствующей фигуры, а зависит только от $h(x)$. Другими словами, если взять две другие функции $f_1(x)$ и $g_1(x)$, такие, что $f_1(x) - g_1(x) = h(x)$, то получим другую фигуру, эквивалентную первой. Полученный нами результат можно сформулировать следующим образом:

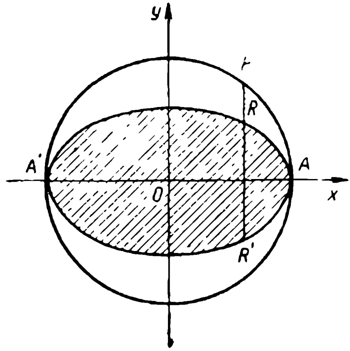
Если две фигуры на плоскости ABDC и MNPQ (черт. 25), ***ограниченные параллельными прямыми AA' и BB', обладают тем свойством, что при пересечении их любой прямой HH', параллельной AA' и BB', получаются отрезки равной длины, то площади этих фигур равны.***

Это предложение называется *принципом Кавальери*. Можно также показать, что в случае если упомянутые выше отрезки составляют отношение, равное некоторой постоянной k, то площади соответствующих фигур находятся в том же отношении k.

Действительно, в этом случае площадь одной из фигур дается формулой $F = \int_a^b h(x)\, dx$, а другой фигуры формулой $F_1 = \int_a^b h_1(x)\, dx$, и так как по условию $h_1(x) = kh(x)$, то имеем:

$$F_1 = \int_a^b h_1(x)\, dx = \int_a^b kh(x)\, dx = k\int_a^b h(x)\, dx = kF.$$

Пример. Построим по точкам фигуру, ставя в соответствие каждой точке P (x, y), взятой на окружности $x^2 + y^2 = a^2$ (черт. 26), точку R с координатами x, $\frac{b}{a}y$, где $b < a$. Таким образом, получим фигуру $ARA'R'A$, называемую эллипсом *). Требуется найти площадь фигуры $ARA'R'A$, т. е. площадь эллипса.



Черт. 26.

Решение. Так как в данном случае $h(x) = y$, $ah_1(x) = \frac{b}{a}y$, то их отношение

$$\frac{h_1(x)}{h(x)} = \frac{b}{a}$$

есть постоянная величина, и, следовательно, в том же отношении находятся и площади F_1 и F эллипса и круга:

$$F_1 = \frac{b}{a}F.$$

Но площадь F круга равна πa^2, следовательно, для площади эллипса найдем:

$$F_1 = \frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab.$$

---

*) Из уравнения окружности находим $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, следовательно, ордината точки R равна $\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Если обозначим ординату точки R через y, то получим $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, где x — абсцисса точки R. Возвышая обе части этого равенства в квадрат, получим.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);\quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2};\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Это последнее есть уравнение эллипса. Итак, координаты точки R удовлетворяют уравнению эллипса, и, следовательно, точка R принадлежит эллипсу.

Упражнения.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 9$.

Ответ: 72.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{9}{x}$, осью Ox и прямыми $x = 3$ и $x = 6$.

Ответ: $9 \ln 2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4x$.

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = ax^2$ и прямыми $x = p$ и $x = q$.

Ответ: $\frac{a}{3}(q^3 - p^3)$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 3x$, параболой $y = -x^2 + 6x$ и осью Ox.

Ответ: 31,5.

6. Вычислить площадь четверти эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ответ: $\frac{\pi ab}{4}$.

Указание. Четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ограничена прямыми $x = 0$, $x = a$, осью Ox и кривой

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

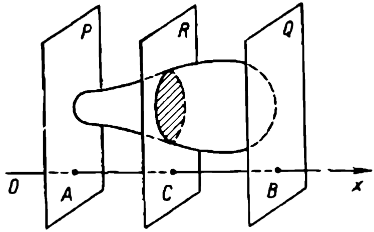
Следовательно, вопрос сводится к вычислению интеграла

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

§ 2. Объемы геометрических тел

Такое же рассуждение, как и в случае вычисления площади криволинейной трапеции, можно применить для определения других величин, например, объема геометрического тела.

Действительно, пусть имеем геометрическое тело T, содержащееся между двумя параллельными плоскостями P и Q (черт. 27). Выберем ось Ox так, чтобы она была перпендикулярна к плоскостям P и Q. Обозначим абсциссы точек пересечения A и B плоскостей P и Q с осью Ox соответственно через a и b $(a < b)$.



Черт. 27.

Рассмотрим плоскость R, перпендикулярную к оси Ox *) и пересекающую ее в точке C, абсцисса которой равна x $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Предположим, что в сечении тела T плоскостью R получается фигура (назовем ее *поперечным сечением*), площадь которой нам известна (или которую мы умеем вычислять) при любом значении x в промежутке $[a, b]$; следовательно, любому значению x из $[a, b]$ соответствует вполне определенная площадь поперечного сечения, т. е. площадь этого сечения есть функция переменной x; обозначим эту площадь через $F(x)$. Предположим, кроме того, что фунция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Требуется определить объем тела T.

Для решения этой задачи разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей (промежутков), не обязательно равных; предположим, что абсциссы точек деления $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ удовлетворяют неравенствам

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b.$$

Для общности обозначений положим $a = x_0$ и $b = x_n$. В каждом из промежутков

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

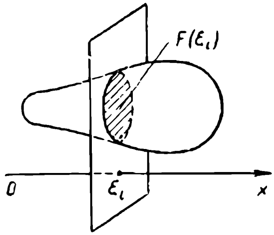
выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i, которая, следовательно, удовлетворяет условию

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i.$$

Проведем через каждую точку ξ_i плоскость, перпенди-

---

*) Плоскость R, следовательно, параллельна плоскостям P и Q.



Черт. 28.

кулярную к оси Ox до пересечения с телом T (черт. 28); получим поперечное сечение, площадь которого равна $F(\xi_i)$. Наконец, построим n цилиндров, имеющих соответственно высоту, равную

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

площадь основания, равную $F(\xi_i)$, и объем, равный $F(\xi_i)\,\Delta x_i$ *).

Интегральная сумма

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i = F(\xi_1)\,\Delta x_1 + F(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + F(\xi_n)\,\Delta x_n$$

выражает объем тела, составленного из n построенных нами цилиндров. Это тело из n цилиндров отличается от тела T тем меньше, чем меньше промежутки $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Разбивая промежуток $[a, b]$ на части все более и более мелкие, будем при этом вычислять каждый раз сумму σ_n.

Предел суммы $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i$, когда части, на которые мы разбиваем промежуток $[a, b]$, становятся сколь угодно малыми **), назовем по определению объемом тела T.

Обозначив этот объем через V, будем иметь:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i \text{ ***)}.$$

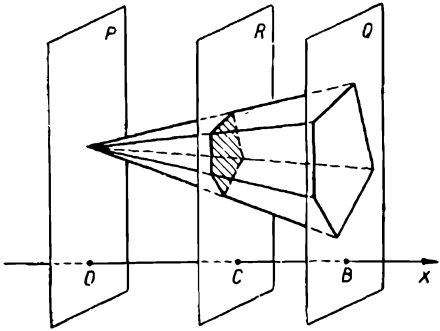
Но предел интегральной суммы σ_n при $\max \Delta x_i$, стремящемся к нулю, обозначается символом $\int\limits_a^b F(x)\,dx$ (см. стр. 41), следовательно,

$$V = \int_a^b F(x)\,dx,$$

*) Если сечение—круг, то строим прямой круговой цилиндр, объем которого, как мы знаем из геометрии, равен произведению площади основания на высоту. Это правило обобщаем и на случай, когда сечение имеет любую другую форму.

**) Функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, и, следовательно, этот предел существует.

***) $\max \Delta x_i$, как и в § 1, стр. 33, есть наибольшая из длин Δx_i интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.



Черт. 29.

т. е. мы получили формулу, позволяющую вычислять объем геометрического тела по площади его поперечных сечений.

Примеры.

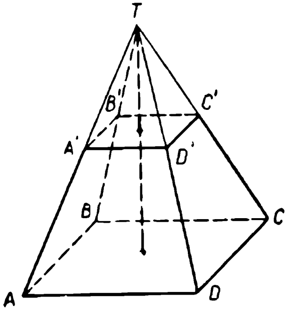
1. *Вычислить объем пирамиды T высоты H, основанием которой служит любой многоугольник площади S.*

Пусть Q — плоскость, в которой лежит основание пирамиды T. Проведем через вершину этой пирамиды плоскость P, параллельную плоскости Q (черт. 29). Выберем ось Ox так, чтобы она была перпендикулярна к плоскостям P и Q. Начало координат выберем в точке O пересечения плоскости P с осью Ox (следовательно, абсцисса точки O равна нулю); абсцисса точки B пересечения плоскости Q с осью Ox равна H, а плоскость R, перпендикулярная к оси Ox, пересекает ее в точке C, абсцисса которой равна x. При пересечении пирамиды T плоскостью R получается многоугольник, площадь которого обозначим через $F(x)$. Из геометрии мы знаем, что в пирамиде площадь основания и площадь сечения, параллельного основанию, относятся как квадраты их расстояний от вершины; следовательно, принимая во внимание, что сечение, параллельное основанию, находится на расстоянии x от вершины, а расстояние основания от вершины равно высоте H, будем иметь:

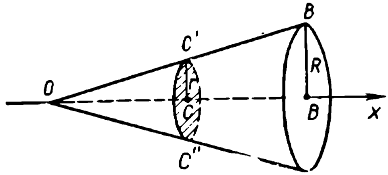
$$\frac{F(x)}{S} = \frac{x^2}{H^2}; \; F(x) = S \cdot \frac{x^2}{H^2}.$$

Таким образом, на основании формулы (1) для вычисления объема пирамиды T получаем формулу:

$$V = \int_0^H S \frac{x^2}{H^2} \, dx,$$



Черт. 30



Черт. 31.

из которой находим:

$$V = S\cdot\frac{1}{H^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^H = S\cdot\frac{1}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3},$$

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

т. е. ***объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.***

Упражнение. Вычислить объем усеченной пирамиды.

Указание. Объем усеченной пирамиды $ABCDA'B'C'D'$ (черт. 30) равен разности объемов пирамид $TABCD$ и $TA'B'C'D'$.

Ответ. $V = \frac{H}{3}(S + \sqrt{Ss} + s)$, где H — высота, S — площадь нижнего основания и s — площадь верхнего основания усеченной пирамиды.

2. *Вычислить объем прямого кругового конуса T, высота которого H, а радиус основания R.*

Решение. Выберем начало координат в вершине O конуса T, а ось Ox направим по его оси симметрии (черт. 31). Точка B является центром основания конуса и имеет абсциссу, равную H. Обозначим буквой x абсциссу центра C сечения, параллельного основанию, и через r радиус этого сечения. Из подобия треугольников OCC' и OBB' следует:

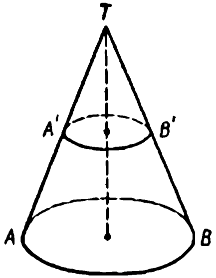
$$\frac{r}{R} = \frac{x}{H}.$$

Отсюда

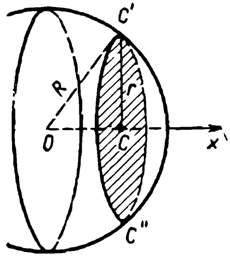
$$r = \frac{R}{H}x \quad \text{и} \quad F(x) = \pi r^2 = \pi\frac{R^2}{H^2}x^2,$$

где $F(x)$ — площадь поперечного сечения $C'C''$. Следовательно, в силу (1) получим для вычисления объема V конуса T формулу

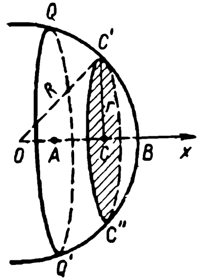
$$V = \int_0^H \pi\frac{R^2}{H^2}x^2dx,$$



Черт. 32.



Черт. 33.



Черт. 34

из которой найдем:

$$V = \pi \frac{R^2}{H^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Итак, ***объем прямого кругового конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.***

Упражнение. Вычислить объем усеченного конуса.

Указание. Объем усеченного конуса $ABA'B'$ равен разности объемов конусов TAB и $TA'B'$ (черт. 32).

Ответ: $V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$,

где H — высота, R — радиус нижнего основания и r — радиус верхнего основания усеченного конуса.

3. *Вычислить объем шара радиуса* R.

Решение. Вычислим объем $\frac{1}{2} V$ половины шара. Введем обозначения, отмеченные на чертеже 33, где начало O координат совпадает с центром шара, а точка C — центр поперечного сечения $C'C''$ — имеет абсциссу x; радиус r сечения равен $\sqrt{R^2 - x^2}$, а площадь $F(x)$ этого сечения равна

$$\pi r^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

Следовательно, для объема половины шара получим формулу:

$$\frac{1}{2} V = \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx,$$

из которой найдем:

$$\frac{1}{2}V = \pi R^2 \int_0^R dx - \pi \int_0^R x^2 dx = \pi R^2 [x]_0^R - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^R =$$

$$= \pi R^2 \cdot R - \pi \frac{R^3}{3} = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Таким образом, объем V шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

4. Пусть QQ' — плоское сечение в шаре (черт. 34). Часть $QQ'B$ шара называется *шаровым сегментом*. Круг QQ' называется *основанием* шарового сегмента, а отрезок AB радиуса, перпендикулярного к основанию, называется *высотой* шарового сегмента.

Требуется *вычислить объем шарового сегмента высоты H, если известно, что радиус шара равен R.*

Решение. Выберем начало координат в центре O шара, а ось направим по радиусу OB, перпендикулярному к основанию QQ' шарового сегмента. На чертеже 34 точка C есть центр поперечного сечения $C'C''$. Обозначим абсциссу точки C буквой x. Точка A — центр основания QQ' — имеет абсциссу, равную $R-H$. Из треугольника OCC', в котором катет OC равен x, а гипотенуза OC' равна R, находим радиус сечения $C'C''$:

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Обозначим через $F(x)$ площадь сечения $C'C''$, тогда

$$F(x) = \pi r^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

Следовательно, для объема V шарового сегмента получим формулу:

$$V = \int_{R-H}^{R} \pi (R^2 - x^2)\, dx.$$

Выполнив вычисления, найдем:

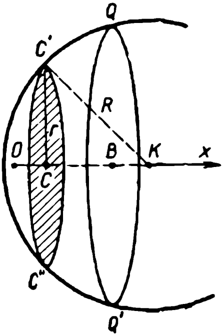
$$V = \int_{R-H}^{R} \pi R^2 dx - \int_{R-H}^{R} \pi x^2 dx = \pi R^2 \int_{R-H}^{R} dx - \pi \int_{R-H}^{R} x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 [x]_{R-H}^{R} - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{R-H}^{R} = \pi R^2 [R - (R-H)] -$$

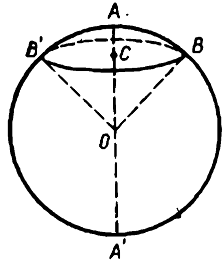
$$- \pi \left[\frac{R^3}{3} - \frac{(R-H)^3}{3}\right] = \pi R^2 H - \frac{\pi}{3}[R^3 - (R^3 - 3R^2H +$$

$$+ 3RH^2 - H^3)] = \pi R^2 H - \frac{\pi}{3}(3R^2H - 3RH^2 + H^3) =$$

$$= \pi R^2 H - \pi R^2 H + \pi R H^2 - \frac{\pi H^3}{3} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right).$$



Черт. 35.



Черт. 36.

Упражнение. Вычислить объем шарового сегмента, выбрав начало координат O (черт. 35) в конце радиуса KO, перпендикулярного к основанию QQ' шарового сегмента, а ось Ox направив по этому радиусу.

Указание. Обозначив через $F(x)$ площадь поперечного сечения, найдем:

$$F(x) = \pi(2Rx - x^2).$$

Следовательно, вычисление объема V шарового сегмента сводится к вычислению интеграла:

$$V = \int_0^H \pi(2Rx - x^2)\,dx,$$

где H — высота OB шарового сегмента, а R — радиус шара.

Замечание. Если в формуле для объема шарового сегмента положить $H = 2R$, то получим объем шара:

$$V = \pi(2R)^2\left(R - \frac{2R}{3}\right) = \pi\cdot 4R^2\cdot\frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

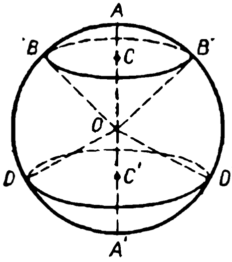
Упражнения.

1) Вычислить объем шарового сектора первого рода *).

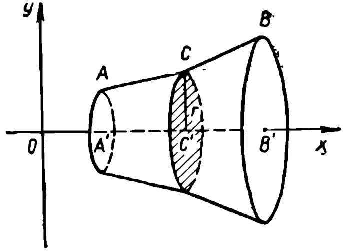
Ответ. $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$, где H — высота сегмента ABB' (черт. 36).

---

*) Шаровым сектором первого рода называется геометрическое тело, которое получается от вращения кругового сектора AOB (черт. 36) вокруг диаметра AA', не пересекающего дугу AB.



Черт. 37.



Черт. 38.

Указание. Объем шарового сектора первого рода равен сумме объемов шарового сегмента ABB' и конуса OBB', имеющего высоту, равную $R-H$.

2) Вычислить объем шарового сектора второго рода*).

Ответ. $V=\frac{2}{3}\pi R^2H$, где H — высота шарового пояса $BB'DD'$ (черт. 37).

Указание. Если из объема шара вычесть сумму объемов шаровых секторов $OBAB'$ и $ODA'D'$ (черт. 37), то получится искомый объем.

5. Пусть AB (черт. 38) — график функции $y=f(x)$, непрерывной в промежутке $[a, b]$. Предположим, что $f(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. Требуется *вычислить объем V тела, полученного вращением криволинейной трапеции $A'ABB'$ вокруг оси Ox.*

Решение. Любое поперечное сечение тела вращения есть круг. Поперечное сечение с центром в точке C' (черт 38), абсциссу которой обозначим буквой x, имеет радиус, равный $f(x)$ **), и поэтому его площадь равна

$$\pi\,[f(x)]^2.$$

Используя формулу (1), найдем:

$$V=\int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx. \qquad (2)$$

---

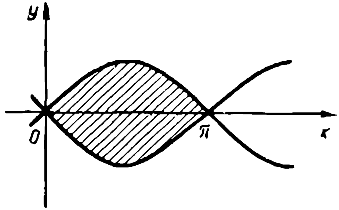
*) Шаровым сектором второго рода называется геометрическое тело, которое получается вращением кругового сектора BOD (черт. 37) вокруг диаметра AA', не пересекающего дугу BD.

**) Точка C принадлежит кривой AB и имеет координаты x, $f(x)$.

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением вокруг оси Ox полуволны синусоиды (черт. 39).

Решение. Полуволна синусоиды есть график функции

$$y = \sin x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$



Черт. 39.

Следовательно, обозначив искомый объем через V, найдем:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \;^{*)} = \pi \int_0^\pi \frac{1}{2} dx -$$

$$- \pi \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \pi \int_0^\pi dx - \frac{1}{4} \pi \int_0^\pi \cos 2x d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi [x]_0^\pi - \frac{1}{4} \pi [\sin 2x]_0^\pi = \frac{1}{2} \pi \cdot \pi - \frac{1}{4} \pi \cdot 0 = \frac{\pi^2}{2}.$$

6. *Пользуясь формулой* $V = \int_a^b F(x)\,dx$, *вычислить объем геометрического тела* T, *если известно, что* $F(x) = ax^2 + bx + c$.

Решение. Выберем ось Ox так, чтобы она была перпендикулярна к параллельным плоскостям P и Q, между которыми содержится данное геометрическое тело T (черт. 40). Начало координат выберем в точке O пересечения плоскости P с осью Ox. В таком случае абсцисса точки O равна нулю. Абсциссу точки B пересечения плоскости Q с осью Ox обозначим через H **).

Плоскость R (черт. 40) перпендикулярна к оси Ox и пересекает ее в точке C, абсциссу которой обозначим буквой x $(0 \leqslant x \leqslant H)$.

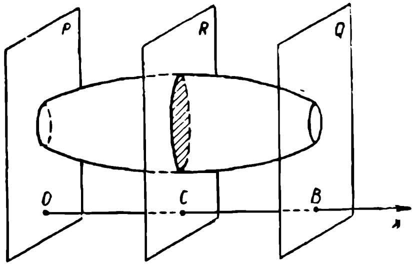
В сечении тела T плоскостью R получается фигура (по-

---

*) Первообразную функцию $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ можно также найти, пользуясь формулой

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C \text{ (см. стр. 57).}$$

**) H есть расстояние от плоскости P до плоскости Q и равно высоте тела T.



Черт. 40.

перечное сечение), площадь которой $F(x) = ax^2 + bx + c$ нам известна для любого x из промежутка $[0, H]$.

Следовательно, для вычисления объема тела T имеем формулу:

$$V = \int_0^H (ax^2 + bx + c)\,dx,$$

из которой найдем:

$$V = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^H = \frac{aH^3}{3} + \frac{bH^2}{2} + cH =$$

$$= \frac{H}{6}(2aH^2 + 3bH + 6c).$$

Замечаем, что

$$2aH^2 + 3bH + 6c = c + 4\left[a\left(\frac{H}{2}\right)^2 + b\,\frac{H}{2} + c\right] +$$

$$+ (aH^2 + bH + c) = F(0) + 4F\left(\frac{H}{2}\right) + F(H),$$

где $F(0)$ — площадь основания, расположенного в плоскости P, $F\left(\frac{H}{2}\right)$ — площадь поперечного сечения, проведенного через середину высоты OB, и $F(H)$ — площадь основания, расположенного в плоскости Q.

Итак, мы получили формулу:

$$\boldsymbol{V = \frac{H}{6}\left[F(0) + 4F\left(\frac{H}{2}\right) + F(H)\right],}$$

называемую *формулой Симпсона*.

Заметим, что эта формула применяется, когда площадь $F(x)$ поперечного сечения тела T есть функция второй степени относительно x, т. е. когда $F(x) = ax^2 + bx + c$.

Замечание 1. В примерах 1—4 настоящего параграфа, вычисляя площади $F(x)$ поперечных сечений пирамиды, конуса, шара и шарового сегмента, мы нашли соответственно выражения:

$$\frac{S}{H^2}x^2,\ \frac{R^2}{H^2}x^2,\ \pi(R^2 - x^2),\ \pi(2Rx - x^2)\ ^{*)},$$

которые являются функциями второй степени относительно x. Это означает, что объемы этих тел могут быть вычислены и с помощью формулы Симпсона.

В качестве примера применим формулу Симпсона для вычисления объема пирамиды.

В этом случае имеем:

$$F(x) = \frac{S}{H^2}x^2,$$

откуда

$$F(0) = 0;$$

$$F\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{S}{H^2}\left(\frac{H}{2}\right)^2 = \frac{S}{4};$$

$$F(H) = \frac{S}{H^2}\cdot H^2 = S.$$

Следовательно,

$$V = \frac{H}{6}\left(0 + 4\cdot\frac{S}{4} + S\right) = \frac{H}{6}\cdot 2S = \frac{1}{3}SH.$$

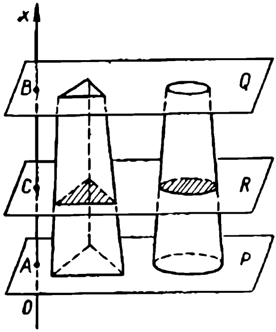
Видим, что этот результат совпадает с полученным ранее в п. I (стр. 76).

Замечание 2. Из формулы (1) получается как следствие принцип Кавальери для объемов:

если два геометрических тела T_1 и T_2, содержащиеся между двумя параллельными плоскостями P и Q, обладают тем свойством, что при пересечении их любой плоскостью R, параллельной P и Q, получаются фигуры, имеющие равные площади, то объемы этих геометрических тел равны.

---

*) См упражнения на стр. 75—79.



Черт. 41.

Действительно, учитывая равенство площадей $F(x)$ поперечных сечений, полученных при пересечении тел T_1 и T_2 плоскостью R (черт. 41), придем к выводу, что объемы этих двух тел выражаются одним и тем же интегралом $\int_a^b F(x)\,dx$, следовательно, эти объемы равны.

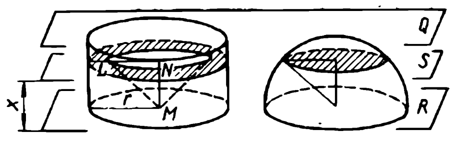
Пользуясь принципом Кавальери, можем, например, вывести формулу для объема шара, если умеем вычислять объем цилиндра и объем конуса.

С этой целью расположим половину шара радиуса R между плоскостью нижнего основания и плоскостью верхнего основания цилиндра радиуса R и высоты R (черт. 42).

Предположим, что из этого цилиндра вырезан и изъят конус с вершиной в центре M нижнего основания цилиндра и с основанием, которое совпадает с верхним основанием цилиндра.

Плоскость S (см. черт. 42) пересекает шар по кругу радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$, и, следовательно, площадь поперечного сечения в шаре равна $\pi(R^2 - x^2)$; эта же плоскость S пересекает цилиндр по кругу радиуса R, а конус — по кругу радиуса x *). Следовательно, площадь поперечного сечения **) в теле, оставшемся от цилиндра, равна

$$\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2).$$



Черт. 42.

*) Так как радиус основания цилиндра равен его высоте, заключаем что в $\triangle MNL$ (черт 42) $\angle NML = 45°$.

**) Это сечение есть круговое кольцо.

Таким образом, поперечные сечения в шаре и теле, оставшемся от цилиндра, имеют равные площади. Следовательно, согласно принципу Кавальери, объем половины шара равен объему тела, оставшегося от цилиндра, т. е. равен разности объемов цилиндра ($\pi R^2 \cdot R$) и конуса $\left(\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\right)$:

$$\pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot R.$$

Отсюда находим, что объем шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Упражнения.

1. Вычислить объем геометрического тела T, содержащегося между двумя параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox соответственно в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 3$, если известно, что площадь $F(x)$ поперечного сечения в T равна $\pi\left(16 - \frac{32}{3}x + \frac{16}{9}x^2\right)$.

Ответ: 16π.

2. Вычислить объем геометрического тела T, содержащегося между двумя параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox соответственно в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = H$, если известно, что площадь $F(x)$ поперечного сечения в T равна $\pi \frac{R^2}{H^2}(H^2 - 2Hx + x^2)$.

Ответ: $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 2px$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.

Ответ: $\pi p(b^2 - a^2)$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейного треугольника, ограниченного косинусоидой $y = \cos x$, прямой $x = 0$ и осью Ox.

Ответ: $\frac{\pi^2}{4}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

6. Вычислить объем шарового слоя, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограничен-

ной прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, осью Ox и дугой окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \leqslant x_1 < x_2 \leqslant R)$.

Ответ: $\pi\left[R^2(x_2 - x_1) - \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}\right]$.

7. Вычислить объем конуса, пользуясь формулой Симпсона.

8. Вычислить объем шара, пользуясь формулой Симпсона.

§ 3. Длина дуги плоской кривой

Рассмотрим в плоскости xOy дугу AB (черт. 43) кривой линии, представляющей график функции $y = f(x)$. Точки A и B имеют соответственно координаты a, $f(a)$ и b, $f(b)$. Чтобы найти длину дуги AB данной кривой, разобьем промежуток $[a\ b]$ на части (промежутки) точками

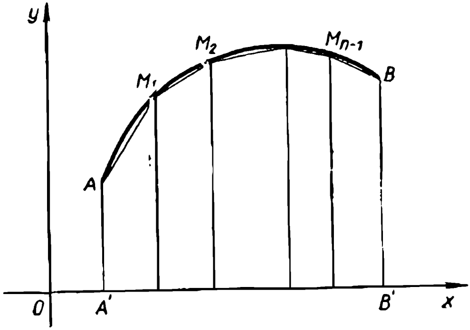
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

В каждой из этих точек восставим перпендикуляр к оси Ox до пересечения с кривой AB. Пусть A M_1, M_2, . M_{n-1}, B — точки пересечения, полученные таким образом Эти точки делят дугу AB на n частей. Обозначим для общности точку A буквой M_0, а точку B буквой M_n. Соединив отрезками прямой последовательно каждые две соседние точки, получим ломаную линию (черт 44) с вершинами M_i $[x_i$ $f(x_i)]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ Так как две соседние вершины M_{i-1}, M_i имеют соответственно координаты

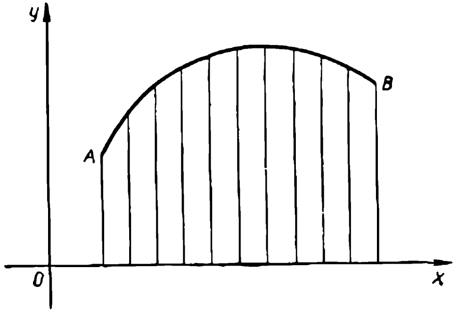
$$[x_{i-1}, f(x_{i-1})], [x_i, f(x_i)]. (1 \leqslant i \leqslant n)$$

то длина хорды $M_{i-1}M_i$ выражается формулой.

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$



Черт. 43.



Черт. 44.

Допустим, что функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ и что эта производная непрерывна в промежутке $[a, b]$.

По теореме Лагранжа

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}),$$

где

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

Полагая

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i,$$

получим

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(\xi_i)\,\Delta x_i]^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}.$$

Следовательно, длина ломаной $M_0M_1M_2 \ldots M_{n-1}M_n$, вписанной в дугу AB, равна:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2} \cdot \Delta x_1 +$$

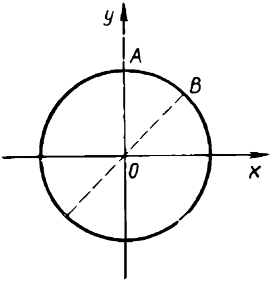
$$+ \sqrt{1 + [f'(\xi_2)]^2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2} \cdot \Delta x_n.$$

Ломаная линия $M_0M_1 \ldots M_{n-1}M_n$, очевидно, отличается от дуги AB. Однако, разбивая промежуток $[a, b]$ на достаточно малые части (промежутки), можно получить ломаные линии, вписанные в дугу, сколь угодно мало отличающиеся от этой дуги. Если мы будем продолжать разбиение промежутка $[a, b]$ на части все более и более малые и вычислять каждый раз сумму σ_n, т. е. длину соответствующей ломаной, то можно ожидать, что в этом процессе разбиения промежутка $[a, b]$ сумма σ_n стремится к определенному конечному пределу. Этот предел, когда он существует, назовем, по определению, *длиной дуги* AB *).

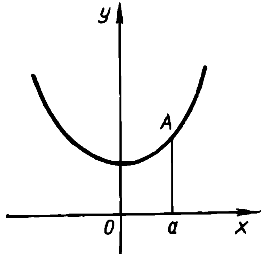
Поэтому, обозначив длину этой дуги буквой L, а наибольшую из длин Δx_i промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ символом $\max \Delta x_i$,

---

*) Это определение является обобщением понятия длины дуги кривой линии (окружности), известного из геометрии.



Черт. 45.



Черт. 46

имеем:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i. \qquad (1)$$

Однако σ_n представляет интегральную сумму непрерывной функции

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

а предел (1), как известно, есть определенный интеграл этой функции, взятый по промежутку $[a, b]$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Таким образом, длина L дуги AB кривой линии, представляющей график функции $y = f(x)$ в промежутке $[a, b]$, равна определенному интегралу от a до b от $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$, т. е.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (2)$$

Пример. Вычислить длину окружности (черт. 45)

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (3)$$

Решение Из уравнения (3) найдем:

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

откуда, вычислив производную обеих частей равенства, получим

$$2yy' = -2x;\ y' = -\frac{x}{y}.$$

Пользуясь формулой (2), найдем длину L дуги AB *):

$$L = \int_0^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx = \int_0^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx\ ^{**)} = r \int_0^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}\ ^{***)} = r \left[\arcsin \frac{x}{r}\right]_0^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= r\left[\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0\right] = r\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{r\pi}{4}.$$

Следовательно, ***длина окружности равна*** $8 \cdot \frac{r\pi}{4} = 2\pi r$

Упражнение. Вычислить длину дуги кривой, представляющей график функции $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ в пределах от нуля до a (черт. 46).

Ответ $\frac{a}{2}(e - e^{-1})$.

§ 4. Площадь поверхности вращения

Рассмотрим в плоскости xOy дугу AB (черт. 47) кривой линии, представляющей график функции $y = f(x)$. Точки A и B имеют соответственно координаты a, $f(a)$ и b, $f(b)$. Допустим, что.

1) функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$;
2) $f(x) > 0$ на $[a, b]$;
3) существует производная $f'(x)$ функции $f(x)$;
4) эта производная непрерывна в промежутке $[a, b]$.

Разобьем промежуток $[a, b]$ на части (промежутки) точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

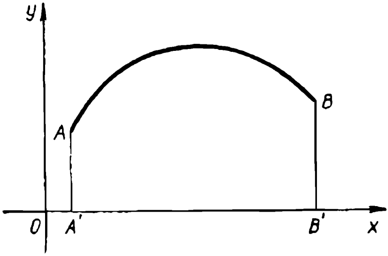
В каждой из этих точек восставим перпендикуляр к оси Ox до пересечения с кривой AB в точках A M_1, M_2, ... , M_{n-1}, B. Обозначим

---

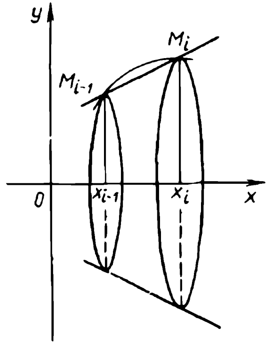
*) Дуга AB содержится между прямыми $x = 0$ и $y = x$ и равна одной восьмой окружности; абсциссы точек A и B соответственно равны 0 и $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

**) Функция $\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ непрерывна в промежутке $\left[0;\ \frac{r\sqrt{2}}{2}\right]$.

***) См. упражнение 13, § 6



Черт. 47.



Черт. 48.

для общности точку A буквой M_0 и точку B буквой M_n. Соединив отрезками прямой последовательно каждые две соседние точки

$$M_{i-1}\,[x_{i-1},\ f(x_{i-1})],\ M_i\,[x_i,\ f(x_i)]\ \ (1 \leqslant i \leqslant n),$$

получим ломаную линию $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$ (черт. 43), вписанную в дугу AB. При вращении фигуры $A'ABB'$ вокруг оси Ox дуга AB опишет некоторую поверхность вращения.

Чтобы найти площадь этой поверхности, вычислим сперва площадь поверхности, описанной при вращении вокруг оси Ox ломаной линией $M_0M_1M_2\ldots M_n$.

При этом вращении каждая сторона $M_{i-1}M_i$ ломаной линии опишет боковую поверхность усеченного конуса *) (черт. 48). Площадь этой поверхности равна.

$$2\pi\,\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}\ {}^{**}).$$

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi\,\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-(f(x_{i-1})]^2} \qquad (1)$$

выражает площадь поверхности, описанной при вращении ломаной $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$ вокруг оси Ox.

---

*) В частности, сторона ломаной линии может описать поверхность конуса или цилиндра, однако и в этом случае площадь соответствующей поверхности можно вычислить по формуле для площади боковой поверхности усеченного конуса.

**) Здесь применена формула для площади боковой поверхности усеченного конуса $S_{бок} = 2\pi\,\frac{r_1+r_2}{2}\cdot G$, где r_1 и r_2 — радиусы оснований, а G — образующая усеченного конуса. Длина образующей найдена по формуле для расстояния между двумя точками

Применяя формулу Лагранжа (см. § 4, гл. I)

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

где

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i,$$

и полагая

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i,$$

запишем сумму (1) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\ \Delta x_i. \tag{2}$$

Считая разности $(\xi_i - x_{i-1})$, $(x_i - \xi_i)$ достаточно малыми и учитывая, что $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$, заменим $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$ числом $f(\xi_i)$ *). Тогда из (2) получим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i. \tag{3}$$

Будем продолжать разбиение промежутка $[a, b]$ на части (промежутки) все более и более мелкие и вычислять каждый раз соответствующую сумму (3). Можно ожидать что в этом процессе разбиения промежутка $[a, b]$ сумма (3) стремится к определенному конечному пределу. Этот предел, когда он существует, назовем, по определению, *площадью поверхности вращения, описанной дугой* AB **).

Обозначим символом $\max \Delta x_i$ наибольшую из длин Δx_i промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Когда $\max \Delta x_i$ стремится к нулю, длина каждого из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ стремится к нулю, а число n этих промежутков стремится к бесконечности.

Поэтому, обозначив буквой F площадь поверхности вращения, описанной дугой AB, можем записать

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i. \tag{4}$$

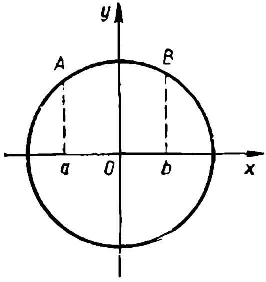
Однако выражение (3) представляет интегральную сумму непрерывной функции

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

---

*) Малым приращениям $(\xi_i - x_{i-1})$, $(x_i - \xi_i)$ аргумента соответствуют также малые приращения $[f(\xi_i) - f(x_{i-1})]$, $[f(x_i) - f(\xi_i)]$ непрерывной функции $f(x)$, так что можем считать $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$ почти равными числу $f(\xi_i)$.

**) Это определение является обобщением известного из геометрии определения площади поверхности круглого тела (шара).



Черт. 49.

а предел (4) равен определенному интегралу этой функции, взятому по промежутку $[a, b]$.

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Таким образом, площадь F поверхности вращения, описанной дугой AB кривой, представляющей график функции $y = f(x)$ на $[a, b]$, равна определенному интегралу от a до b

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx, \text{ т. е.}$$

$$F = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{5}$$

Пример. Из геометрии известно, что шаровой пояс можно рассматривать как поверхность, описанную дугой окружности при вращении вокруг диаметра, не пересекающего эту дугу.

Пусть AB (черт 49) — дуга окружности радиуса R с центром в начале системы координат xOy, уравнение которой

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\ {}^{*)}.$$

Обозначим координаты точек A и B соответственно буквами a и b $(b > a)$.

Нам нужно вычислить площадь поверхности, описанной этой дугой при вращении вокруг оси Ox, т. е площадь шарового пояса.

Имея в виду формулу (5), выполним следующие операции:

1. $f'(x) = -\dfrac{2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

2. $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left[-\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right]^2} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\ {}^{**)}$.

3. $f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R$.

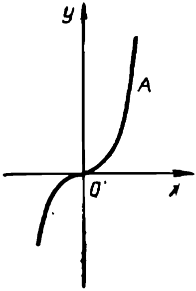
4. $\displaystyle\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b 2\pi R dx$

---

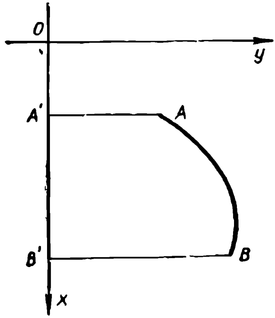
*) Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ для ее половины, расположенной над осью Ox, получим $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

**) Тот же результат можно получить и так из уравнения окружности найдем $y^2 = R^2 - x^2$, откуда $2yy' = -2x$; $y' = -\dfrac{x}{y}$;

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$



Черт. 50.



Черт. 51.

5. $\int\limits_a^b 2\pi R dx = 2\pi R \int\limits_a^b dx = 2\pi R\,[x]_a^b = 2\pi R\,(b - a).$

Обозначив высоту шарового пояса через H и учитывая, что $b - a = H$, найдем

$$F = 2\pi R H,$$

т. е. ***площадь поверхности шарового пояса равна произведению длины окружности большого круга ($2\pi R$) на высоту (H).***

Замечание 1. В частности, при $a = -R$ найдем площадь сегментной поверхности *)

$$F = 2\pi R H,$$

где H — высота сегментной поверхности.

Замечание 2. В частности, при $a = -R$, $b = R$ и, значит, $H = b - a = R - (-R) = 2R$ найдем площадь поверхности шара:

$$F = 4\pi R^2.$$

Упражнение. Дуга OA (черт. 50) кубической параболы $y = x^3$, ограниченная точками с абсциссами $x = 0$ и $x = a$, вращается вокруг оси Ox. Вычислить площадь поверхности, описанной дугой OA при вращении вокруг оси Ox.

Ответ: $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.

§ 5. Задачи из физики

1. Давление жидкости на пластинку. Предположим, что вертикальная пластинка $A'ABB'$, имеющая форму криволинейной трапеции (черт. 51), погружена в жидкость. Верхняя

*) Сегментную поверхность можно рассматривать как поверхность, описанную дугой окружности при вращении вокруг диаметра, который проходит через один из концов дуги.

сторона $A'A$ этой пластинки параллельна свободной поверхности жидкости, сторона ее $A'B'$ вертикальна, а сторона $B'B$ параллельна $A'A$.

Систему координат выберем так, чтобы ось Ox была направлена вниз по вертикальной стороне $A'B'$ пластинки, а ось Oy была расположена на свободной поверхности жидкости и параллельна $A'A$ (черт. 51). Сторона AB пластинки имеет форму кривой линии, уравнение которой есть $y = f(x)$. Точки A' и B' имеют соответственно абсциссы a, b $(a < b)$.

Требуется определить силу давления жидкости на пластинку $A'ABB'$.

Решение. Из физики известно, что сила давления жидкости на горизонтальную пластинку, погруженную в нее на глубину x*), равна весу столба жидкости, имеющего в основании эту пластинку и высоту x. Следовательно, введя обозначения: s — для площади пластинки, γ — для удельного веса жидкости и q — для силы давления жидкости, можем записать:

$$q = \gamma s x. \tag{1}$$

Согласно принципу Паскаля давление в жидкости передается одинаково во всех направлениях, следовательно, и в направлении, перпендикулярном к пластинке $A'ABB'$. Но сила давления жидкости на вертикальную пластинку $A'ABB'$ изменяется с глубиной (см. формулу 1), поэтому для ее вычисления применим тот же способ, что и при вычислении площадей и объемов (см. § 1, гл. II, § 1, 2, гл. III).

Итак, разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей (промежутков) точками, абсциссы которых $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ удовлетворяют условию:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b.$$

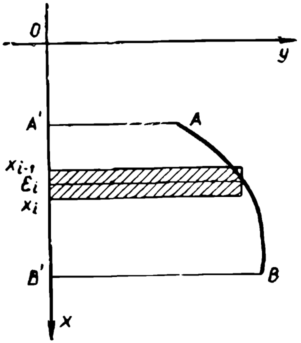
Для общности положим $a = x_0$ и $b = x_n$. В каждом из промежутков

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

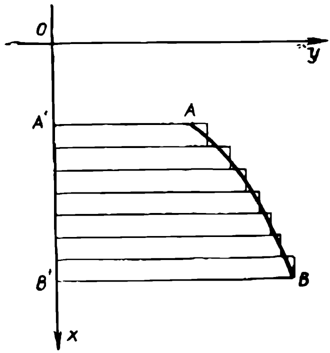
выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i, которая, следовательно, удовлетворяет условию

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i.$$

*) Глубина x отсчитывается от свободной поверхности жидкости



Черт. 52.



Черт. 53.

В каждой точке ξ_i (черт. 52) восставим перпендикуляр к оси Ox до пересечения с AB. Получим точки пересечения с координатами

$$\xi_i,\ f(\xi_i)\ \ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Наконец, проведем через точки $[\xi_i, f(\xi_i)]$ прямые, параллельные оси Ox, и построим n прямоугольников (черт. 53) соответственно с основанием $f(\xi_i)$, высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и площадью, равной $f(\xi_i)\,\Delta x_i$. Хотя давление жидкости на нижнюю сторону прямоугольника с измерениями

$$f(\xi_i),\ \Delta x_i\ \ (1 \leqslant i \leqslant n)$$

больше, чем давление на его верхнюю сторону, мы допустим, что давление жидкости на этот прямоугольник постоянное на всей его поверхности.

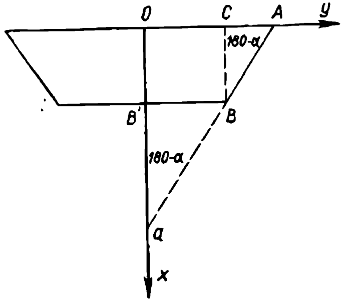
Таким образом, учитывая, что площадь прямоугольника равна $f(\xi_i)\,\Delta x_i$, соответствующий столб жидкости имеет высоту, равную ξ_i, и удельный вес жидкости равен γ, найдем, что сила давления жидкости на этот прямоугольник равна:

$$\gamma \xi_i f(\xi_i)\,\Delta x_i\ \ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma \xi_i f(\xi_i)\,\Delta x_i = \gamma \xi_1 f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \\ + \gamma \xi_2 f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + \gamma \xi_n f(\xi_n)\,\Delta x_n \qquad (2)$$

выражает силу давления жидкости на пластинку $A'ABB'$, вычисленную пока что приближенно.



Черт. 54.

Обозначив силу давления жидкости на пластинку $A'ABB'$ буквой Q, а наибольшую из длин Δx_i промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ символом $\max \Delta x_i$, имеем:

$$Q = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma \xi_i f(\xi_i) \tag{3}$$

Однако (2) является интегральной суммой непрерывной функции $\gamma x f(x)$, а предел (3), как мы знаем, есть определенный интеграл этой функции, взятый по промежутку $[a, b]$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b \gamma x f(x)\, dx.$$

Следовательно,

$$Q = \int_a^b \gamma x f(x)\, dx. \tag{4}$$

Полученная нами формула (4) дает решение задачи, сформулированной выше (стр. 94).

Упражнение. Плотина имеет форму равнобедренной трапеции. Верхнее основание ее равно a и находится на свободной поверхности воды, а нижнее основание, погруженное в воду, равно b. Высота OB' плотины (черт. 54) (от свободной поверхности воды до нижнего основания трапеции) равна H. Требуется вычислить силу давления воды на эту плотину.

Решение. Ось Ox направим по оси симметрии OB' плотины (черт. 54), а ось Oy — по верхней стороне OA.

Вычислим силу давления воды на половину $OB'BA$ плотины.

Чтобы написать уравнение стороны AB, нужно найти ее угловой коэффициент *), т. е. тангенс угла α, образованного прямой AB с осью Ox (черт. 54). Проведем BC параллельно Ox. Из прямоугольного треугольника ABC, в котором катет AC равен $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, а катет BC равен H, найдем

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{a-b}{2H},$$

*) Здесь имеем в виду уравнение вида $y = mx + n$ прямой.

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b-a}{2H}.$$

Отрезок, отсекаемый прямой AB на оси Oy, равен $\frac{a}{2}$. Следовательно, уравнение прямой AB запишется так:

$$y = \frac{b-a}{2H}x + \frac{a}{2}.$$

Применяя формулу (4), найдем:

$$\frac{Q}{2} = \int_0^H \gamma x\left(\frac{b-a}{2H}x + \frac{a}{2}\right)dx,$$

где $\frac{Q}{2}$ — сила давления воды на половину $OB'BA$ плотины.

Выполняя вычисления, получим:

$$\frac{Q}{2} = \int_0^H \gamma\frac{b-a}{2H}x^2\,dx + \int_0^H \gamma\frac{a}{2}x\,dx = \gamma\frac{b-a}{2H}\int_0^H x^2\,dx +$$

$$+ \gamma\frac{a}{2}\int_0^H x\,dx\,^{*)} = \gamma\frac{b-a}{2H}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^H + \gamma\frac{a}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^H =$$

$$= \gamma\frac{b-a}{2H}\,\frac{H^3}{3} + \gamma\frac{a}{2}\,\frac{H^2}{2} = \gamma\frac{b-a}{2}\,\frac{H^2}{3} + \gamma\frac{a}{2}\,\frac{H^2}{2} =$$

$$= \gamma\frac{H^2}{2}\left(\frac{b-a}{3} + \frac{a}{2}\right) = \gamma\frac{H^2}{2}\,\frac{2b-2a+3a}{6} = \gamma\frac{H^2}{2}\,\frac{2b+a}{6},$$

откуда

$$Q = \gamma\frac{H^2}{6}(2b+a).$$

В частности, при $a = 350$ *дм*, $b = 125$ *дм*, $H = 80$ *дм*, $\gamma = 1\frac{кГ}{дм^3}$, получим:

$$Q = 1\cdot\frac{80^2}{6}(2\cdot 125 + 350)\ кГ = \frac{80^2}{6}\cdot 600\ кГ = 640\,000\ кГ.$$

2. **Путь, пройденный движущимся телом.** В § 3, гл. 1 мы нашли, что длина L пути, пройденного телом, движущимся со скоростью $v = f(t)$, сводится к задаче о вычислении предела суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\,\Delta t_i$ при $\max\Delta t_i$, стремящемся

*) Удельный вес воды γ — постоянная

к нулю. Этот предел, как мы знаем, обозначается символом $\int\limits_a^b f(t)\,dt$.

Черт. 55.

Следовательно,

$$L = \int\limits_a^b f(t)\,dt. \tag{5}$$

Применим эту формулу для вычисления пути, пройденного телом в свободном падении.

Известно, что скорость v тела, падающего в пустоте с начальной скоростью v_0, равна $v_0 + gt$:

$$v = v_0 + gt.$$

Вычислим длину пути L, пройденного этим телом за промежуток времени $[0, T]$.

Решение.

$$L = \int\limits_0^T (v_0 + gt)\,dt = \int\limits_0^T v_0 dt + \int\limits_0^T gt dt = v_0 \int\limits_0^T dt +$$

$$+ g \int\limits_0^T t dt = v_0 [t]_0^T + g \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T,$$

откуда

$$L = v_0 T + g\frac{T^2}{2}.$$

3. **Работа переменной силы.** Допустим, что тело M перемещается по оси Ox от A к B (черт. 55) под действием силы F, направленной по этой оси. Обозначим абсциссы точек A и B соответственно через a и b. Пусть величина силы F зависит от абсциссы x точки приложения, т. е. $F = f(x)$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на $[a, b]$.

Требуется вычислить работу, которую совершает сила F при перемещении тела M из A в B.

Решение. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей (промежутков); предположим, что абсциссы точек деления $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_{n-1}$ удовлетворяют неравенствам

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b.$$

Для общности положим $a = x_0$ и $b = x_n$. В каждом из промежутков

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

выберем произвольным образом по точке с абсциссой ξ_i, которая, следовательно, удовлетворяет условию

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i.$$

Функция $F = f(x)$, будучи непрерывной, почти не изменяется на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$, длина которого $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ достаточно мала; поэтому мы можем считать силу F на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ приблизительно постоянной и равной $f(\xi_i)$. Работа, совершенная постоянной силой, величина которой $f(\xi_i)$, при перемещении тела M из точки x_{i-1} в точку x_i равна

$$f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n \quad (6)$$

выражает приближенное значение искомой работы, совершенной силой $F = f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Обозначив эту работу через L, а наибольшую из длин промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ через $\max \Delta x_i$, мы можем записать:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \quad (7)$$

Но (6) есть интегральная сумма непрерывной функции $f(x)$, а предел (7) является определенным интегралом этой функции, взятым по промежутку $[a, b]$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

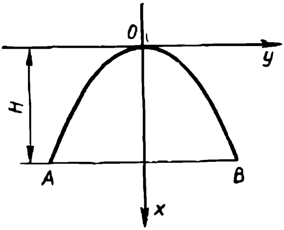
Таким образом,

$$L = \int_a^b f(x)\,dx. \quad (8)$$

Полученная нами формула (8) является решением задачи, сформулированной выше (стр. 99).

Примечание. Если направление силы F совпадает с направлением движения тела M по оси Ox, то работа, совершенная этой силой, имеет положительное значение; в противном случае эта работа отрицательна.

Пример. Предположим, что на прямой MN расположены два электрических заряда c и c' и что расстояние



Черт. 56.

между ними равно r. Сила взаимодействия этих двух зарядов направлена по MN и равна

$$F = k\frac{cc'}{r^2},$$

где k — постоянная.

Требуется вычислить работу, совершенную силой F, когда заряд c неподвижен, а заряд c' перемещается по MN из R_1 в R_2.

Решение.

$$L = \int_{R_1}^{R_2} k\frac{cc'}{r^2}\,dr = kcc'\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2},$$

откуда

$$L = kcc'\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

В частности, если заряд $c' = +1$ перемещается под действием силы F из положения R_1 в бесконечно удаленную точку, то работа, совершенная силой F, равна:

$$L = \lim_{R_2\to\infty} kc\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{kc}{R_1}.$$

Таким образом, нами получено значение потенциала в точке с абсциссой R_1 электрического поля, создаваемого зарядом c.

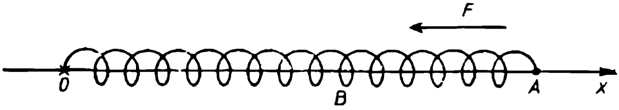
Упражнения.

1. Вертикальная пластина, погруженная в жидкость, имеет форму прямоугольника. Основание этого прямоугольника равно b, а высота равна a; верхнее основание пластины параллельно свободной поверхности воды и находится на глубине h. Найти давление воды на эту пластину.

Ответ: $\frac{1}{2}ab(a+2h)$.

2. Вертикальная пластина AOB ограничена параболой $y^2 = 2px$ (черт. 56). Вершина параболы находится на свободной поверхности воды. Нижняя сторона AB пластины находится на глубине H. Вычислить давление воды на эту пластину.

Ответ: $\frac{4}{5}\sqrt{2p}\cdot H^2\sqrt{H}$.



Черт. 57.

3. Точка движется по прямой со скоростью $v = at^2$. Вычислить длину пути, пройденного этой точкой в первые T единиц времени от начального момента $t = 0$.

Ответ: $\frac{1}{3} aT^3$.

4. Точка M движется по прямой AB под действием силы $F = a \cos x$, направленной вдоль прямой AB. Вычислить работу, совершенную силой F при перемещении точки на расстоянии от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: a.

5. Точка M перемещается по оси Ox из точки A с абсциссой a в точку B с абсциссой b (черт. 57) под действием упругой силы F пружины, пропорциональной абсциссе x точки M. Вычислить работу, совершенную силой F.

Указание. $F = -kx$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Знак «—» в выражении для F показывает, что сила F имеет отрицательное направление по оси Ox.

Ответ: $\frac{k}{2}(a^2 - b^2)$.

§ 6. Краткие исторические сведения

Интегральное исчисление возникло в связи с задачами об определении площадей и объемов.

За 2000 лет до н. э. египтяне и вавилоняне уже умели определять приближенно площадь круга и знали правило для вычисления объема усеченной пирамиды.

Задача теоретического обоснования правил для вычисления площадей и объемов появляется впервые в науке у древних греков. Знаменитый философ-материалист Демокрит из Абдеры в V веке до н. э. рассматривает тела, как состоящие из очень большого числа весьма малых частиц. С этой точки зрения конус представляет совокупность весьма тонких цилиндрических дисков различных диаметров.

Большую роль сыграла в истории интегрального исчисления задача о квадратуре *) круга. Гиппократ из Хиоса (середина V в. до н. э.) первым нашел точную квадратуру нескольких криволинейных фигур.

Философ Антифон (конец V в. до н. э.) применил способ приближения для определения площади криволинейной фигуры с помощью вписанных в нее прямолинейных фигур.

В IV веке до н. э. Евдокс из Книды применил для вычисления площадей и объемов метод исчерпывания **).

Архимед (287—212 гг. до н. э.) при определении площадей и объемов пользовался разложением плоской фигуры или геометрического тела на элементы. Так, например, в задаче вычисления объема эллипсоида вращения он делит его ось симметрии на равные части и строит вписанные и описанные цилиндры, имеющие высотой равные отрезки оси симметрии. Иными словами, Архимед впервые составляет для определения объема суммы, которые в настоящее время называются интегральными суммами.

И. Кеплер (1615 г.) и Б. Кавальери (1635 г.) развили метод «неделимых», применяя его для вычисления площадей и объемов. Связь между дифференцированием и интегрированием была показана (1670 г.) И. Барроу.

Появление дифференциального и интегрального исчислений в настоящем смысле этого слова относится к последней трети XVII века. Основные операции нового исчисления были исследованы в общем виде И. Ньютоном и Г. Лейбницем.

Г. Лейбницу принадлежит символ дифференциала dx (1675—1684 гг.) и символ интеграла $\int y\,dx$ (1675, 1668 гг).

Символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ввел Ж. Фурье (1819—1822 гг.).

Термин «интеграл» (от латинского integer — целый) был предложен И. Бернулли.

Работа по исследованию основ дифференциального и интегрального исчислений начинается в XIX веке трудами О. Коши и Б. Больцано.

В развитие интегрального исчисления в XIX веке внесли значительный вклад М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, В. Я. Чебышев.

---

*) Квадратура круга — построение такого квадрата, площадь которого была бы равна площади данного круга.

**) См. «Начала Евклида», книги XI—XV. М. — Л., 1950, стр 281.

Литература

1. Н. П. Тарасов. Курс высшей математики для техникумов, изд 4. М. — Л., 1945.

2 А К Власов. Курс высшей математики, т. I, изд. 4, исправленное. М. — Л., 1945.

3. Р. Курант и Г. Роббинс Что такое математика. М. — Л., 1947.

4 Г М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. М. — Л., 1948.

5. Н. Н. Лузин. Интегральное исчисление, изд. 3. М., 1952.

6 Энциклопедия элементарной математики, под ред П. С. Александрова, А. И Маркушевича и А. Я. Хинчина. кн 3. Функции и пределы М. — Л., 1952.

7. А Я. Хинчин Краткий курс математического анализа. М., 1953.

8. «Академия наук СССР» Математика, ее содержание, методы и значение, т. I, 2. М., 1956.

9. И. К. Парно. Производная и ее применение к исследованию функций М, 1968.

10. И. А. Марнянский. Элементы математического анализа в школьном курсе математики. М., 1964.

11. А. Н. Черкасов. Введение в высшую математику. М., 1964.

12. Л. С. Фрейман. Что такое высшая математика М., 1965.

13 И. Г. Башмакова, А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. Статья «Знаки математические» в БСЭ.

14 А П. Юшкевич. Статья «Дифференциальное исчисление» в БСЭ.

15. А. П. Юшкевич. Статья «Интегральное исчисление» в БСЭ.

16. Д. Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. М., 1964.

СОДЕРЖАНИЕ

Иван Константинович
Парно

ИНТЕГРАЛЫ В ДЕСЯТОМ КЛАССЕ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Редактор Г. С. Уманский. Художественный редактор В. Г. Ежков
Технический редактор Л. К. Кухаревич
Корректор Н. М. Данковцева

* * *

Сдано в набор 23/V 1969 г Подписано к печати 12/XII 1969 г. 84 × 108 1/32. Типографская № 1. Печ. л. 3,25. Условных л. 5,46. Уч.-изд. л. 4,74. Тираж 40 тыс экз. (Пл. 1969 г. № 160).

* * *

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41
Типография издательства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский проспект, 79
Заказ № 349 Цена 14 коп.