

БИБЛИОТЕКА ДЛЯ ЮНОШЕСТВА

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

**ЧИСЛА-
ВЕЛИКАНЫ**

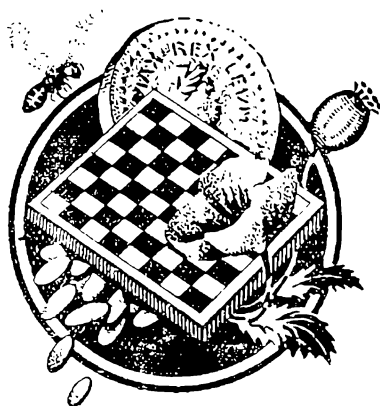
▼ РАДУГА ▼

1925

БИБЛИОТЕКА ДЛЯ ЮНОШЕСТВА

Я.И. ПЕРЕЛЬМАН

ЧИСЛА ВЕЛИКАНЫ



*РИСУНКИ
В.ТВАРДОВСКОГО*

ИЗДАТЕЛЬСТВО

♦ РАДУГА ♦

МОСКВА

1925

ЛЕНИНГРАД

Ленинградский гублпт № 6025.

Тираж 10000 экз. 4 п. л.

Гос. уч. правт. шв.-тиш. им. гов. Алексеен. Ленинград. Красная, 1.

ВЫГОДНАЯ СДЕЛКА



ЧЕЛОВЕК, от которого я слышал эту историю, не сказал мне, где и когда она произошла. Может быть, и вовсе не происходила; даже вернее всего, что так. Но она настолько занятна, что я все же расскажу вам ее в том виде, в каком сам слышал.

I.

К богачу миллионеру явился однажды неизвестный человек и предложил вступить с ним в денежную сделку — такую, о какой богачу до тех пор не приходилось и слышать.

— С завтрашнего дня — сказал незнакомец — я буду целый месяц приносить тебе ежедневно по тысяче рублей.

Миллионер слушал, затаив дыхание. Незнакомец замолчал.

— Ну, говори же! Что хочешь за это получить?

— В первый день заплатишь за тысячу рублей всего одну копейку.



— Одну копейку? — переспросил богач, думая, что ослышался.

— Одну копейку. За вторую тысячу заплатишь две копейки.

— Ну, — не терпелось миллионеру. — А дальше?

— А дальше: за третью тысячу 4 копейки, за четвертую 8, за пятую — 16. И так целый месяц, каждый день вдвое против предыдущего.

— И все?

— Все. Больше ничего не потребую. Только крепко держать уговор: каждое утро буду носить по тысяче рублей, а ты плати, что сговорено. Раньше месяца кончать не смей.

«Тысячи рублей за копейки отдает. Верно, деньги фальшивые, или не в полном уме человек», — подумал богач.

— Ладно, — согласился он. — Неси деньги. Я-то свои уплачу аккуратно. Сам, смотри, не обмани; правильные деньги приноси.

Будь покоен. Завтра с утра жди.

Незнакомец ушел, а миллионер долго раздумывал: придет завтра странный посетитель или уж не появится больше? Как бы не спохватился, что слишком невыгодно дело затеял...

II.



Рано утром посту-
чал в окошко вче-
рашний гость.

— Деньги го-
товь! — говорит. —
Я свои принес.

И, действительно,
стал выкладывать деньги, — настоя-
щие, не фальшивые бумажки.
Отсчитал ровно тысячу и гово-
рит:

— Вот мое по уговору. Те-
перь твой черед платить.

Богач положил на стол мед-
ную копейку и с опаской дожи-
дался, возьмет гость монету или раздумает, свою
тысячу назад потребует.

Посетитель осмотрел копейку, взвесил в руке
и спрятал в суму.

— Завтра в такое же время жди. Да не за-
будь две копейки припасти, — сказал он и ушел.

Богач не верил удаче: тысяча рублей с неба
свалилась! Снова пересчитал принесенные деньги,

удостоверился хорошенько, что не фальшивые: все было, как следует. Запрятал деньги подалее и стал ждать завтрашней тысячи.

Ночью взяло его сомнение: не разбойник ли простаком прикинулся, хочет поглядеть, куда деньги прячу, да и ограбить? Запер богач двери



покрепче, с вечера в окна поглядывал, прислушивался, долго заснуть не мог.

На утро снова стук в окно: незнакомец деньги принес. Отсчитал полную тысячу, получил две копейки, спрятал монету в суму и ушел, бросив на прощанье:

— К завтрашнему утру четыре копейки, смотри, приготовь!

Снова радуется богач: вторая тысяча даром досталась! А гость и не похож на грабителя:

по сторонам не глядит, не высматривает, лишнего не выспрашивает, свои только копейки требует. Чудак! Побольше бы таких на свете, умным людям хорошо бы жилось...

На третье утро опять стук в окно. Явился незнакомец — и третья тысяча перешла к богачу за 4 копейки

Еще день, и таким же манером явилась четвертая тысяча — за восемь копеек.

Пришла и пятая тысяча — за 16 копеек.

Потом шестая — за 32 копейки.

К концу недели получил наш богач уже 7 тысяч рублей, а уплатил пустяк:

1 коп. + 2 коп. + 4 коп. + 8 коп. + 16 коп. +
+ 32 коп. + 64 коп. = 1 р. 27 коп.

Понравилось это алчному миллионеру, и он уже стал сожалеть, что уговорился всего на один только месяц. Больше 30 тысяч получить не удастся. Разве уговорить чудака продлить срок еще хоть на две три недели? Боязно: как бы не спохватился, что зря деньги отдает...

А незнакомец по-прежнему аккуратно являлся каждое утро со своей тысячею. На восьмой день он получил 1 р. 28 коп., на 9-й — 2 р. 56 коп.

на 10-й—5 р. 12 к., на 11 й—10 р. 24 коп., на 12 й—20 р. 48 коп., на 13-й—40 р. 96 коп., на 14-й—81 р. 92 коп.

Богач охотно платил эти деньги: ведь он получил уже 14000 рублей, а отдал незнакомцу всего около полутораста.

III.

Недолго, однако, длилась радость богача: скоро стал он соображать, что странный гость вовсе не простак, и что сделка с ним не так выгодна, как казалось сначала. Дело в том, что на третьей неделе приходилось за очередные тысячи



платить уже не копейки, а сотни рублей, и плата эта страшно быстро нарастала. В самом деле, богач уплатил в начале третьей недели:

за 15-ую тысячу . . .	163 р. 84 коп.
„ 16-ую „ . . .	327 „ 68 „
„ 17-ую „ . . .	655 „ 36 „
„ 18-ую „ . . .	1310 „ 72 „

Продолжать сделку становилось положительно невыгодно: получаешь тысячу, а платишь больше. Но нарушать уговора нельзя, надо дотянуть до конца месяца. Впрочем, богач не считал себя в убытке: он хотя и уплатил больше двух с половиною тысяч, зато получил полных 18.

Но дальше пошло хуже. Слишком поздно убедился миллионер, что незнакомец жестоко перехитрил его и получит куда больше денег, чем сам уплатит. Вот дальнейшие платежи:

за 19-ю тысячу	2621 р. 44 коп.
„ 20-ю „	5242 „ 88 „
„ 21-ю „	10485 „ 76 „
„ 22-ю „	20971 „ 52 „
„ 23-ю „	41943 „ 04 „

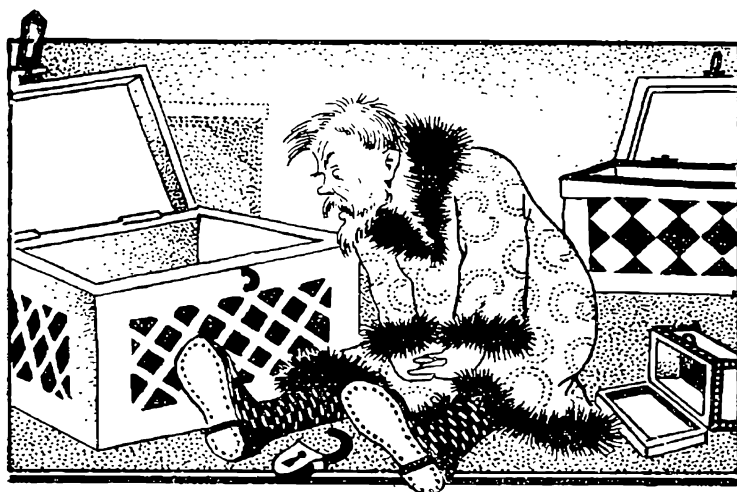
За одну только 23-ю тысячу миллионер уплатил больше, чем получит за весь месяц!

Настала последняя неделя месяца — и эти 7 дней в конец разорили нашего миллионера. Действительно, он уплатил:

за 24-ю тысячу	83886 р. 08 коп.
„ 25 ю „	167772 „ 16 „
„ 26 ю „	335544 „ 32 „

за 27-ю тысячу		671088 р. 64 коп.
„ 28-ю	„	1342177 „ 28 „
„ 29-ю	„	2684354 „ 56 „
„ 30-ю	„	5368709 „ 12 „

Когда гость ушел в последний раз, миллионер подсчитал, во что обошлись ему столь дешевые



на первый взгляд 30 тысяч рублей. Оказалось, что уплачено было незнакомцу

10737418 р. 23 коп.

Без малого 11 миллионов... А ведь началось с одной копейки! Незнакомец мог бы приносить даже по сто тысяч в день — и все-таки не прогадал бы.

IV.

Прежде чем кончить с этой историей, покажу еще, каким способом можно облегчить подсчет убытков миллионера, т. е. как скорее всего выполнить сложение ряда чисел:

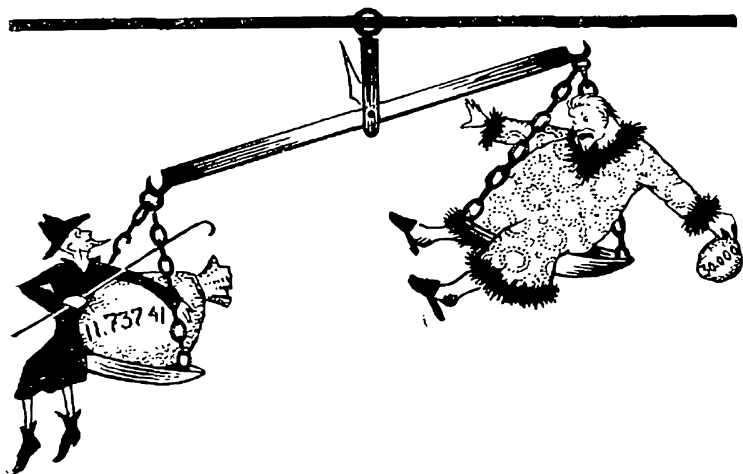
$$1 - 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \text{ и т. д.}$$

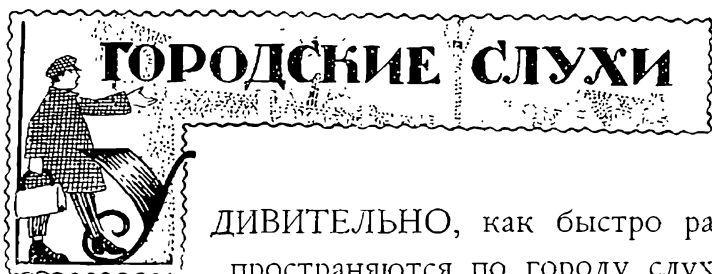
Нетрудно подметить следующую особенность этих чисел:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 1 \\ 4 &= (1 + 2) + 1 \\ 8 &= (1 + 2 + 4) + 1 \\ 16 &= (1 + 2 + 4 + 8) + 1 \\ 32 &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 1 \\ &\text{и так далее.} \end{aligned}$$

Мы видим, другими словами, что каждое число этого ряда равно всем предыдущим, вместе взятым, да еще одна единица. Поэтому, когда нужно сложить все числа ряда, например, от 1 до 32768, то мы лишь прибавляем к последнему числу (32768) сумму всех предыдущих (т.-е. 32768—1). Получаем 65535.

Этим способом мы можем подсчитать убытки нашего миллионера очень быстро, как только узнаем, сколько уплатил он в последний день. Его последний платеж был 5368706 р. 12 коп. Поэтому, сложив 5368709 р. 12 к. и 5368709 р. 11 коп., получаем сразу искомый результат: 10737418 р. 23 к.





ДИВИТЕЛЬНО, как быстро распространяются по городу слухи!

Иной раз и двух часов не пройдет со времени какого-нибудь интересного происшествия, случившегося на глазах всего нескольких зрителей, — а новость уже облетела весь город: все о ней знают, все слышали.

Эта необычайная быстрота кажется поразительной, прямо загадочной. Однако, если подойти к делу с подсчетом, то станет ясно, что ничего чудесного и непостижимого здесь нет: все объясняется свойствами чисел, а не какими-то таинственными особенностями самих слухов.

Для примера рассмотрим хотя бы такой случай. В губернский город приехал в 8 часов утра житель столицы и привез с собою свежую, всем интересную новость. В гостинице, где приезжий

остановился, он сообщил эту новость только трем местным жителям; это заняло, скажем, четверть часа.

Итак, в 8 $\frac{1}{4}$ часа утра новость была известна всего только четверым людям: приезжему и трем



местным жителям.

Узнав интересную новость каждый из троих граждан поспешил рассказать ее 3-м другим. Это потребовало, допустим, также четверти часа,—срок не слишком короткий для передачи слуха. Значит, спустя полчаса после прибытия новости в город, о ней знало уже

$$4 + 3 \times 3 = 13 \text{ человек.}$$

Каждый из 9-ти вновь узнавших в такой же срок поделился с 3-мя другими гражданами, так что к 8 $\frac{3}{4}$ часам утра новость стала известна.

$$13 + 3 \times 9 = 40 \text{ гражданам.}$$

Если слух распространяется по городу и далее таким же способом, т.-е. каждый узнавший



про новость успевает в ближайшие четверть часа сообщить ее 3 согражданам, то осведомление города будет происходить по следующему расписанию:

в 9 час. новость узнают $40 + 3 \times 27 = 121$ челов.

» 9 $\frac{1}{4}$ » » » $121 + 3 \times 81 = 364$ »

» 9 $\frac{1}{2}$ » » » $364 + 3 \times 243 = 1093$ »

Спустя полтора часа от начала движения слуха, о новости будут знать, как видим, всего около 1100 человек. Это, казалось бы, немного для города с населением в 50.000, и можно, пожалуй, подумать, что новость не скоро еще станет известна всем его жителям. Однако, проследим далее за движением слуха:

в 9 $\frac{3}{4}$ час. новость узнают $1093 + 3 \times 729 = 3280$ ч.

» 10 » » » $3280 + 3 \times 2187 = 9841$ »

Еще спустя четверть часа, уже больше половины города будет посвящено в новость:



$$9841 + 3 \times 6561 = 29524$$

И следовательно, ранее чем к половине одиннадцатого дня поголов-



но все жители будут знать новость, которая в 8 часов утра была известна только одному человеку.

II.

Подсчет наш сводился, в сущности, к тому, что мы сложили такой ряд чисел:

$$1 + 3 + 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 3 \times 3 + \text{и т. д.}$$

Нельзя ли узнать эту сумму как-нибудь короче, наподобие того, как определяли мы на стр. 13 сумму чисел ряда $1 + 2 + 4 + 8 + \text{и т. д.}$? Это возможно, если принять в соображение следующую особенность складываемых здесь чисел:

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$9 = (1 + 3) \times 2 + 1$$

$$27 = (1 + 3 + 9) \times 2 + 1$$

$$81 = (1 + 3 + 9 + 27) \times 2 + 1$$

и так далее.

Иначе говоря: каждое число этого ряда равно удвоенной сумме всех предыдущих чисел да еще одна единица.

Отсюда следует, что если нужно найти сумму всех чисел такого ряда от 1 до какого-либо числа, то достаточно лишь прибавить к этому последнему числу его половину (предварительно откинув единицу). Например, сумма чисел

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$$

равна $729 + \text{половина от } 728, \text{ т.-е. } 729 + 364 = 1093.$

III.

В нашем случае каждый узнавший новость передавал ее только троим гражданам. Но если бы жители города были более словоохотливы и сообщали услышанную новость не 3-м, а например, 5-ти или даже 10-ти другим, то слух распространялся бы, конечно, еще быстрее. Так, при передаче пятерым, картина осведомления города была бы такая:

в 8	час.		1 чел.
» 8 ^{1/4}	»		$1 + 5 = 6$ чел.
» 8 ^{1/2}	»		$6 + 5 \times 5 = 31$ чел.
» 8 ^{3/4}	»		$31 + 25 \times 5 = 156$ чел.
» 9	»		$156 + 125 \times 5 = 781$ чел.
» 9 ^{1/4}	»		$781 + 625 \times 5 = 3906$ чел.
» 9 ^{1/2}	»		$3906 + 3125 \times 5 = 19531$ чел.

Ранее, чем в 9^{3/4} часа новость уже будет известна всему 50-тысячному населению города.

Еще быстрее распространится слух, если каждый услышавший новость передаст о нем 10-ти другим. Тогда получим такой любопытный ряд чисел:

в 8 час. I
 » $8\frac{1}{4}$ » $I + 10 = 11$
 » $8\frac{1}{2}$ » $11 + 100 = 111$
 » $8\frac{3}{4}$ » $111 + 1000 = 1111$
 » 9 » $1111 + 10000 = 11111$

Следующее число этого ряда, очевидно, 111111; это показывает, что весь город узнает про новость уже в самом начале 10-го часа утра. Слух разнесется почти в один час!





Полководец Теренций по приказу императора совершил победоносный поход и с трофеями вернулся в Рим. Прибыв в столицу, он просил допустить его к императору.

Император ласково принял полководца, сердечно благодарил его за военные услуги империи и обещал в награду дать ему высокое положение в сенате.

Но Теренцию нужно было не это. Он возразил :

¹⁾ Рассказ в вольной передаче заимствован из старинной латинской рукописи, принадлежащей одному из частных книгохранилищ в Англии.

— Много побед одержал я, чтобы возвысить
твое могущество, государь, и окружить имя твое



славой. Я не страшился смерти, и будь у меня
не одна, а много жизней, я все их принес бы

тебе в жертву. Но я устал воевать; прошла молодость, кровь медленнее бежит в моих жилах. Наступила пора отдохнуть в доме моих предков и насладиться радостями домашней жизни.

— Чего же желал бы ты от меня, Теренций? — спросил император.

— Выслушай со снисхождением, государь. За долгие годы военной жизни, изо дня в день обагрывая меч свой кровью, я не успел устроить себе денежного благополучия. Я беден, государь. . .

— Продолжай, храбрый Теренций.

— Если хочешь даровать награду скромному слуге твоему, — продолжал ободренный полководец, — то пусть щедрость твоя поможет мне дожить жизнь в достатке и мире подле домашнего очага. Я не ищу почестей и высокого положения во всемогущем сенате. Я желал бы удалиться от власти и от жизни общественной, чтобы отдохнуть на покое. Государь, дай мне денег для обеспечения остатка моей жизни.

Император, — гласит предание, — не отличался широкой щедростью. Он любил копить деньги для себя и скупое тратил их на другие нужды. Просьба полководца заставила его задуматься.

— Какую же сумму, Теренций, считал бы ты для себя достаточной? — спросил он.

— Миллион динариев, государь.

Снова задумался император. Полководец ждал, опустив голову. Наконец, император заговорил:



— Доблестный Теренций! Ты великий воин, и славные подвиги твои заслужили щедрой награды. Я дам тебе богатство. Завтра в полдень ты услышишь здесь мое решение.

Теренций поклонился и вышел.

II.

На следующий день в назначенный час полководец явился во дворец императора.

— Привет тебе, храбрый Теренций! — сказал император.

Теренций смиренно наклонил голову.

— Я пришел, государь, чтобы выслушать твое решение. Ты милостиво обещал вознаградить меня.

Император ответил:

— Я не хочу, чтобы такой благородный воитель, как ты, получил за свои подвиги жалкую награду. Выслушай же меня. В моем казначействе лежит 5 миллионов медных брассов ¹⁾. Теперь внимай моим словам. Ты войдешь в казначейство, возьмешь одну монету в руки, вернешься сюда и положишь ее к моим ногам. На другой день вновь пойдешь в казначейство, возьмешь монету, равную двум брассам и положишь здесь рядом с первой. В третий день принесешь монету, стоящую 4 брасса, в четвертый — стоящую 8 брассов, в пятый — 16, и так далее, все удваивая стоимость монеты. Я прикажу ежедневно изготовлять для тебя монеты надлежащей ценности. И пока хватит у тебя сил поднимать монеты, ты будешь выносить их из моего казначейства. Никто не должен помогать тебе, ты можешь поль-

¹⁾ Мелкая монета, пятая часть динария.

зоваться только собственными силами. И когда заметишь, что уже не можешь больше поднять монету — остановись: уговор наш кончится, но все монеты, которые удастся тебе из казначейства вынести, останутся навсегда твоими и послужат тебе наградой.



Жадно впитывал Теренций каждое слово императора. Ему чудилось уже огромное множество монет, которое он вынесет из государственного казначейства...

Несколько мгновений он размышлял, потом ответил с радостной улыбкой:

— Я доволен твоей милостью, государь. Поистине щедра награда твоя!

III.

Начались ежедневные посещения Теренцием государственного казначейства. Оно помещалось



невдалеке от приемной залы императора, и первые переходы с монетами не стоили Теренцию никаких усилий.

В первый день вынес он из казначейства всего один брасс. Это небольшая монета, размерами и весом приблизительно с нашу копейку: 21 миллиметр в поперечнике и 5 граммов весом.

Столь же легки были второй, третий, четвертый, пятый и шестой переходы, когда полководец выносил монеты двойного, четверного, 8-кратного, 16-кратного и 32-кратного веса.

Седьмая монета весила на наши современные меры 320 граммов (около $\frac{3}{4}$ фунта) и имела

в поперечнике $8\frac{1}{2}$ сантиметров (точнее 84 миллиметра¹⁾).

На восьмой день Теренцию пришлось вынести из казначейства монету, соответствующую 128 единичным монетам. Она весила 640 граммов и была шириною около $10\frac{1}{2}$ сантиметров.

На девятый день Теренций принес в императорскую залу монету в 256 единичных монет. Она имела 13 сантиметров в ширину и весила более $1\frac{1}{4}$ килограмма.



На 12-й день монета достигала почти 27 сантиметров в поперечнике и весила $10\frac{1}{4}$ килограмма.

Император, до сих пор смотревший только приветливо на полководца, теперь не скрывал своего радостного чувства. Он видел, что сделано уже 12 переходов, а вынесено из казначейства всего только 2000 с небольшим медных монет.

¹⁾ Если монета по объему в 64 раза больше обычной, то она шире и толще всего в 4 раза, потому что $4 \times 4 \times 4 = 64$. Это надо иметь в виду и в дальнейшем при расчете размеров монет, о которых говорится в рассказе.



Тринадцатый день доставил храброму Теренцию монету, равную 4096 единичным монетам. Она имела около 34 сантиметров в ширину, а вес ее равнялся $20\frac{1}{2}$ килограммам (около $1\frac{1}{4}$ пуда).

На четырнадцатый день Теренций вынес из казначейства тяжелую монету в

41 килограмм весом и около 42 сантиметров шириною.

— Не устал ли ты, мой храбрый Теренций? — спросил его император, сдерживая улыбку.

Нет, государь мой, хмуро ответил полководец, отирая пот со лба.

Наступил 15-ый день. Тяжела была на этот раз ноша Теренция. Медленно брел он к императору, неся огромную монету, со-



ставленную из 16384 единичных монет. Она достигала 53 сантиметров в ширину и весила 80 килограммов - тяжесть рослого воина.



На 16-й день полководец шатался под ношей, лежавшей на его спине. Это была монета, равная 32768 единичным монетам и весящая 164 кило-

Когда Теренций явился в приемную залу императора на следующий день, он был встречен громким смехом. Он не мог уже нести свою ношу в руках, а катил ее впереди себя. Монета имела в поперечнике 84 сантиметра и весила 328 килограммов. Она соответствовала весу 65536 единичных монет.

Восемнадцатый день был последним днем обогащения Теренция. В этот день кончились его посещения казначейства и странствования с ношей в залу императора. Ему пришлось доставить на этот раз монету, соответствовавшую 131072 единичным монетам. Она имела 107 сантиметров в поперечнике и весила 655 килограммов (около 40 пудов). Пользуясь своим копьем, как рычагом, Теренций с величайшим напряжением сил едва вкатил ее в залу. С грохотом упала исполинская монета к ногам императора.

Теренций был совершенно измучен.

— Не могу больше. Довольно, — прошептал он.

Император с трудом подавил смех удовольствия, видя полный успех своей хитрости. Он приказал казначею исчислить, сколько всего бросов вынес Теренций в приемную залу.

Казначей исполнил поручение и сказал:

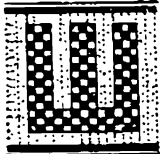
— Государь, благодаря твоей щедрости, победоносный воитель Теренций получил в награду 262143 брасса.

Итак, скупой император дал полководцу менее 20-й части той суммы в миллион динариев, которую просил Теренций.





ЛЕГЕНДА О ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

АХМАТЫ — одна из самых древних игр. Она существует уже около двух тысяч лет, и неудивительно, что с ее возникновением связаны предания, правдивость которых за давностью времени невозможно проверить. Одну из подобных легенд я и хочу рассказать. Чтобы понять ее, не нужно вовсе уметь играть в шахматы: достаточно знать, что игра происходит на доске, разграфленной на 64 клетки (попеременно черные и белые).

I.

Шахматная игра была придумана в Индии, и когда царь Шерам познакомился с нею, он был

восхищен ее остроумием и разнообразием возможных в ней положений. Узнав, что она изобретена одним из его подданных, царь приказал его позвать, чтобы лично наградить за удачную выдумку.

Изобретатель — его звали Сета — явился к трону повелителя. Это был скромно одетый ученый, получавший средства к жизни от своих учеников.

— Я желаю достойно вознаградить тебя, Сета, за прекрасную игру, которую ты придумал, — сказал царь.

Мудрец поклонился.

— Я достаточно богат, чтобы исполнить самое смелое твое пожелание. Назови награду, которая тебя удовлетворит, и ты получишь ее.

Сета молчал.

— Не робей, — ободрил его царь. — Выскажи свое желание. Я не пожалею ничего, чтобы исполнить его.

— Велика доброта твоя, повелитель. Но дай срок обдумать ответ. Завтра, по зрелом размышлении, я сообщу тебе мою просьбу.

Царь отпустил его.

Когда на другой день Сета снова явился

к ступеням трона, он изумил царя безпримерной скромностью своей просьбы.

- Повелитель, - сказал он, — прикажи выдать



мне за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно.

— Простое пшеничное зерно? — удивился царь.

— Да, повелитель. За вторую клетку прикажи выдать 2 зерна; за третью — 4, за четвертую — 8, за пятую — 16, за шестую — 32...



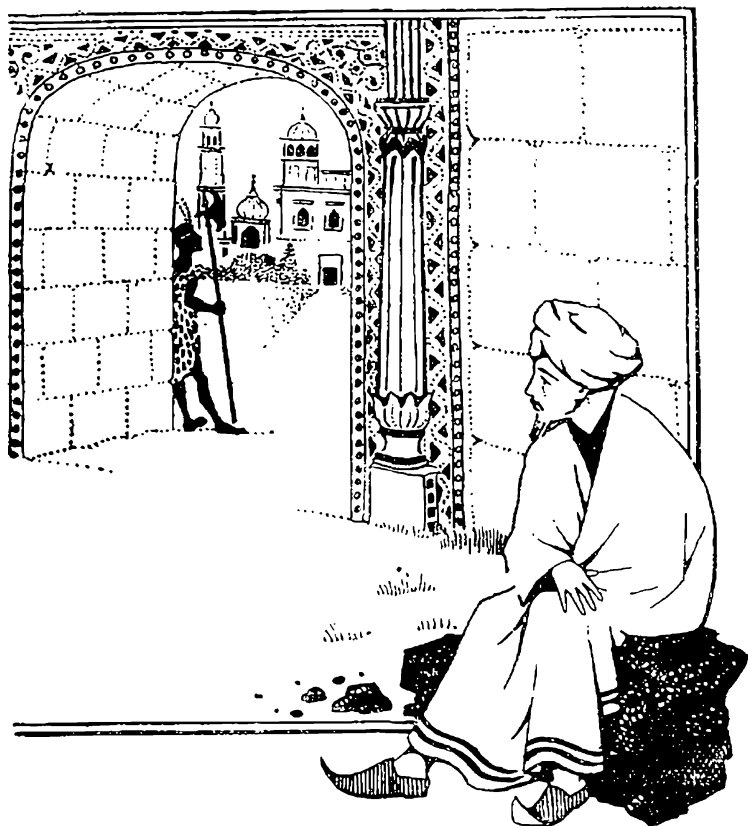
— Довольно, с раздражением прервал его царь. — Ты получишь свои жалкие зерна за все 64 клетки доски, согласно твоему желанию: за каждую вдвое против предыдущей. Но знай, что просьба твоя недостойна моей щедрости. Требуя такую ничтожную награду, ты безрассудно пренебрегаешь моею милостью. Поистине, как

учитель, ты мог бы показать лучший пример уважения к доброте твоего государя. Ступай. Слуги мои вынесут тебе мешок с твоей пшеницей.

Сета улыбнулся, покинул залу и стал дожидаться у ворот дворца.

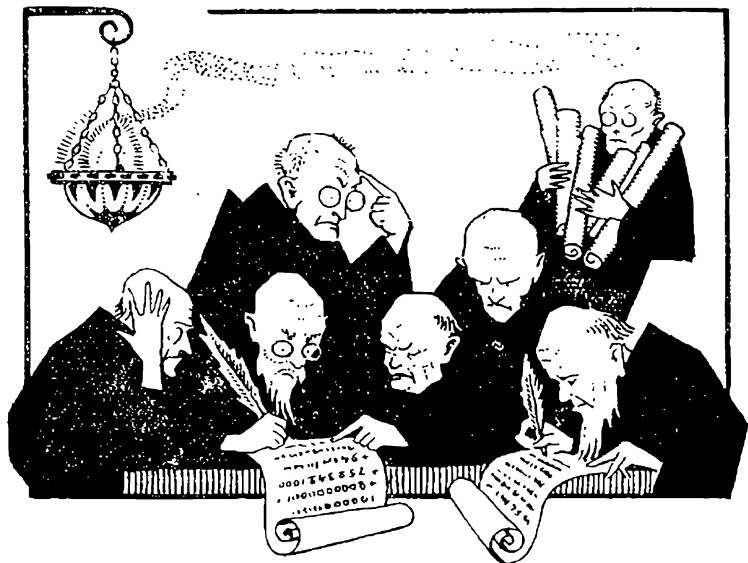
II.

За обедом царь вспомнил об изобретателе



шахмат и послал узнать, унес ли уже безрассудный Сета свою награду.

— Повелитель, — был ответ, — приказание твое исполняется. Придворные математики подсчитывают число следуемых зерен.



Царь нахмурился. Он не привык, чтобы повеления его исполнялись так медлительно.

Вечером, отходя ко сну, царь еще раз осведомился, давно ли Сета со своим мешком пшеницы покинул ограду дворца.

— Повелитель, — ответили ему, — твои математики трудятся без усталости и надеются еще до рассвета закончить подсчет.

— Почему медлят с этим пустым делом? — гневно воскликнул царь. — Завтра, прежде чем я проснусь, все до последнего зерна должно быть выдано Сете. Я дважды не приказываю!

Утром царю доложили, что старшина придворных математиков просит выслушать важное донесение. Царь приказал ввести его.

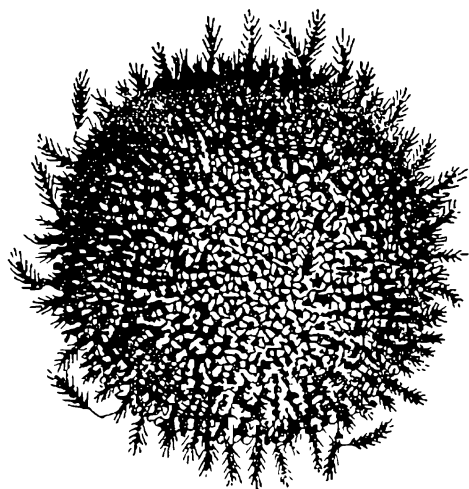
— Прежде чем скажешь о твоём деле, — объявил Шерам, — я желаю услышать, выдана ли, наконец, Сете та жалкая награда, которую он себе назначил?

— Ради этого я и осмелился явиться перед тобой в столь ранний час, — ответил старик. — Мы добросовестно исчислили все количество зерен, которое желает получить Сета. Число это так велико...

— Как бы велико оно ни было, — перебил царь, — житницы мои не оскудеют. Награда обещана и должна быть выдана...

— Повелитель, не в твоей власти исполнять подобные желания. Во всех амбарах твоих нет такого числа зерен, какое потребовал Сета. Нет его и в житницах целого царства. Нет такого числа зерен и на всем пространстве земли. И если желаешь непременно выдать обещанную награ-

ду, то прикажи превратить все земные царства в пахотные поля, прикажи осушить моря и океаны, прикажи растопить льды и снега, покрывающие далекие северные пустыни. Пусть все эти пространства будут сплошь засеяны пшеницей. И



все, что родится на этих полях, прикажи отдать Сете. Тогда он получит свою награду.

С изумлением внимал царь словам старца.

- Назови же мне это чудовищное число, — сказал он в раздумьи.

— Восемнадцать триллионов четыреста сорок шесть тысяч семьсот сорок четыре биллиона семьдесят три тысячи семьсот девять миллионов пятьсот пятьдесят одна тысяча пятьсот пятна-

дцать зерен. В биллионе, повелитель, миллион миллионов, а в триллионе миллион биллионов¹⁾.

III.

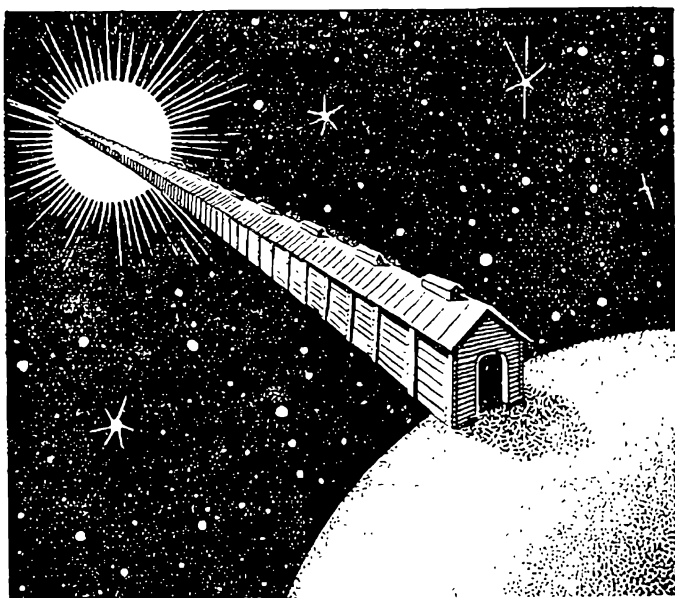
Такова легенда. Действительно ли было то, что здесь рассказано, — неизвестно, но что награда, о которой говорит предание, должна была исчисляться именно таким числом, в этом вы можете сами убедиться терпеливым подсчетом. Начав с 1-цы нужно сложить числа: 1, 2, 4, 8, и т. д. Результат 63-го удвоения покажет, сколько причиталось изобретателю за 64-ую клетку доски. Поступая, как объяснено было на стр. 13, мы без труда найдем все число следуемых зерен, если удвоим последнее число и отнимем одну единицу. Следовательно, подсчет сводится к перемножению 64 двоек:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 \text{ и т. д. } 64 \text{ раза.}$$

¹⁾ Такое исчисление принято в науке; что же касается обыденной жизни, то в ней биллион исчисляется в тысячу миллионов, триллион — в тысячу биллионов и т. д. Количество зерен, следовавших Сете, будет исчисляться на обиходном языке в восемнадцать квинтильонов, четыреста сорок шесть квадрильонов, семьсот сорок четыре триллиона, семьдесят три биллиона семьсот девять миллионов пятьсот пятьдесят одна тысяча пятьсот пятнадцать.

Для облегчения выкладок разделим эти 64 множителя на 6 групп по 10 двоек в каждой, и одну последнюю группу из 4 двоек. Произведение 10 двоек, как легко убедиться, равно 1024, а 4-х двоек — 16. Значит, искомый результат равен

$$1024 \cdot 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 16$$



Перемножив 1024×1024 , получим 1048576. Теперь остается найти

$$1048576 \times 1048576 \times 1048576 \times 16,$$

отнять от результата одну единицу — и нам станет известно искомое число зерен:

18446744073709551515.

Если желаете представить себе всю огромность этого числового великана, прикиньте, какой величины амбар потребовался бы для вмещения такого количества зерен. Известно, что кубический метр пшеницы (примерно 5 четвертей) вмещает около 15 миллионов зерен. Значит, награда шахматного изобретателя должна была бы занять объем в 1200000000000 кубических метров (или 1200 кубических километров). При высоте амбара в 4 метра и ширине 10 метров, длина его должна была бы простирается на 300000000 километров. — т.-е. вдвое дальше, чем от Земли до Солнца!

IV.

Разумеется, индусский царь не в состоянии был выдать подобной награды. Но он легко мог освободиться от такого обременительного долга. Для этого нужно было лишь предложить Сете самому отсчитать себе, зерно за зерном, всю причитающуюся ему пшеницу.

В самом деле: если бы Сета, принявшись за счет, вел его непрерывно день и ночь, отсчитывая

по зерну в секунду, он в первые сутки отсчитал бы всего 86400 зерен (4 четверика). Чтобы отсчитать миллион зерен, ему понадобилось бы не менее 10 суток неустанного счета. Один кубический метр пшеницы он отсчитал бы дней в полтораста: это дало бы ему всего 5 четвертей. Считая непрерывно в течение 10 лет, он отсчитал бы себе не более 100 четвертей. Вы видите, что, посвятив счету даже весь остаток своей жизни, Сета получил бы ничтожную часть потребованной им награды.





БЫСТРОЕ — РАЗМНОЖЕНИЕ



ПЕЛАЯ маковая головка полна крошечных зернышек; из каждого может вырасти целое растение. Сколько же получится маков, если все зернышки прорастут? Чтобы узнать это, надо сосчитать зернышки в целой головке. Скучное занятие, но результат подсчета так интересен, что стоит запастись терпением и довести его до конца. Оказывается, одна головка мака содержит круглым числом 3000 зернышек!

Что отсюда следует? То, что будь кругом нашего макового растения достаточно подходящей земли, каждое упавшее зернышко дало бы росток, и на будущее лето на этом месте выросло бы уже 3000 маков. Целое маковое поле от одной головки.

Посмотрим же, что будет дальше. Каждое из 3000 растений принесет не менее одной головки (чаще приносит несколько), содержащей 3000 зерен; проросши, семена каждой головки



дадут 3000 новых растений, и, следовательно, на второй год у нас будет уже не менее

$3000 \times 3000 = 9\,000\,000$ растений.

Легко рассчитать, что на третий год число потомков нашего единственного мака уже будет достигать

$$9\,000\,000 \times 3000 = 27\,000\,000\,000$$

А на четвертый год

$$27\,000\,000\,000 \times 3000 = 81\,000\,000\,000\,000.$$

На пятом году макам уже будет положительно тесно на земном шаре, потому что число растений будет равно

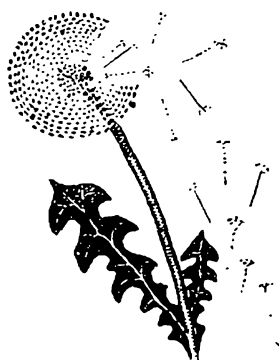
$$81\,000\,000\,000\,000 \times 3000 = 243\,000\,000\,000\,000\,000;$$

поверхность же всей суши, т.-е. всех материков и островов земного шара, составляет только

$$135\,000\,000\,000\,000 \text{ кв. метр.}$$

Другими словами, на каждый метр твердой земли будет приходиться около 2000 маковых растений!

Вы видите, что если бы все зернышки мака прорастали, то потомство одного растения могло бы всего в пять лет покрыть сплошь всю сушу земного шара густой зарослью по две тысячи растений на каждом квадратном метре. Вот какой числовой великан скрывается в обыкновенном маковом зернышке!



Сделав подобный же расчет не для мака, а для какого-нибудь другого растения, приносящего меньше семян, вы пришли бы к такому же результату; но только потомство его покрыло бы всю Землю не в 5 лет, а в несколько больший срок. Возьмем, например, одуванчик, приносящий ежегодно около 100 семян. Если бы все они прорастали, мы имели бы

в 1-й год	1 растение
во 2-й »	100 »
в 3-й »	10.000 »
» 4-й »	1.000.000 »

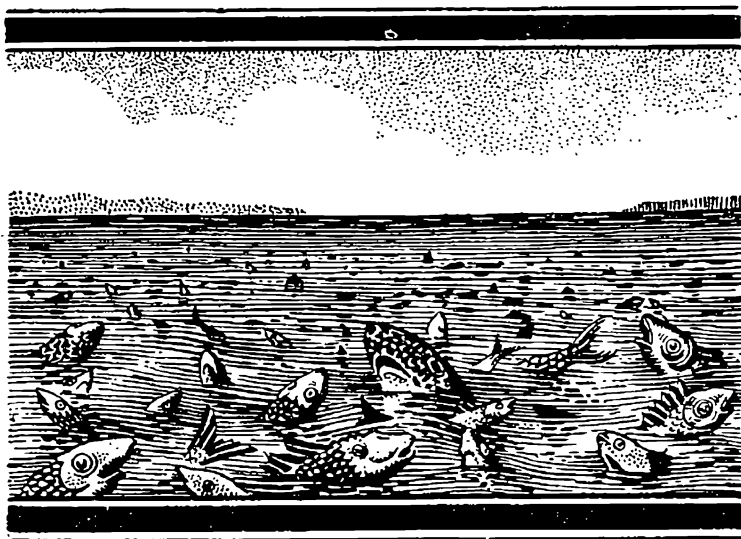
в 5-й год	100.000.000 растений	
» 6-й »	10.000.000.000	»
» 7-й »	1.000.000.000.000	»
» 8-й »	100.000.000.000.000	»
» 9-й »	10.000.000.000.000.000	»



Следовательно, на 9-м году все материки были бы покрыты одуванчиками по 70 на каждый квадратный метр.

Почему же в действительности мы не наблюдаем такого чудовищно быстрого размножения? Потому, что огромное большинство семян погибает, не давая ростков: они или не попадают на подхо-

дующую почву и вовсе не прорастают, или, начав прорастать, заглушаются другими растениями, или же, наконец, просто истребляются животными. Но если бы этого массового уничтожения семян



и ростков не было, то каждое растение в короткое время покрыло бы сплошь всю нашу планету.

Это верно и для животных. Если бы не было смерти, то потомство одной пары любого животного рано или поздно заполнило бы всю Землю. Полчища саранчи, сплошь покрывающие огромные пространства, могут дать нам некоторое представление о том, что было бы, если бы смерть не

препятствовала размножению живых существ. В каких-нибудь два-три десятка лет все материк зарос бы непроходимыми лесами и степями, где кишели бы миллионы животных, борющихся между собою за место. Океан наполнился бы рыбой до того густо, что никакое судоходство

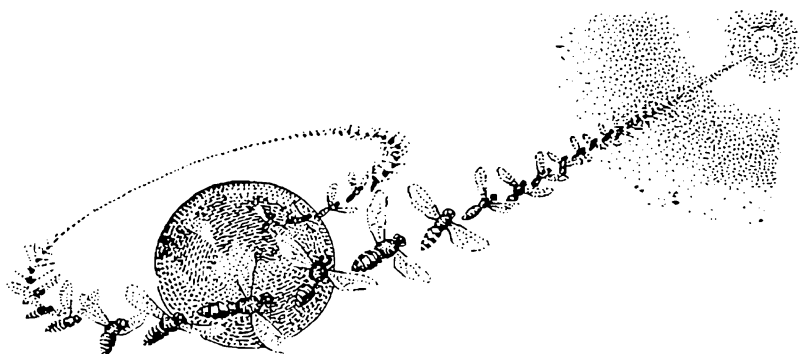


не было бы возможно. А воздух стал бы непрозрачен от множества птиц и насекомых...

В заключение рассмотрим для примера, как быстро размножается комнатная муха. Пусть каждая муха откладывает 120 яичек и пусть в течение лета успевает появляться 7 поколений мух. За начало первой кладки примем 15 апреля, и будем считать, что муха-самка в 20 дней успевает вырасти

настолько, что сама откладывает яйца. Тогда размножение будет происходить так:

15 апреля — самка отложила 120 яиц,
в начале мая вышло 120 мух, из них 60 самок,
5 мая — каждая самка кладет 120 яиц,
в середине мая — выходит $60 \times 120 = 7200$ мух;
из них 3600 самок;



25 мая — каждая из 3600 самок кладет по 120 яиц;

в начале июня — выходит $3600 \times 120 = 432000$ мух,
из них 216000 самок;

14 июня — каждая из 216000 самок кладет по 120 яиц;

в конце июня выходит 25920000 мух, в том числе 12960000 самок;

5 июля — 12960000 самок кладут по 120 яиц;

в июле — выходит 1555200000 мух; среди них 777600000 самок;

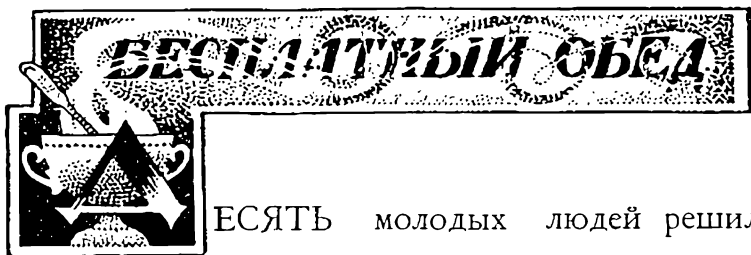
25 июля — выходит 93312000000 мух; среди них 46656000000 самок;

13 августа — выходит 5598720000000 мух; среди них 2799360000000 самок;

1 сентября — выходит 355923200000000 мух.

Чтобы яснее представить себе огромную массу мух, которые при беспрепятственном размножении могли бы народиться от одной пары, вообразим, что они выстроены в прямую линию, одна возле другой. Так как длина мухи 7 миллиметров, то все эти мухи вытянулись бы на 2500 миллионов километров — в 18 раз дальше, чем от Земли до Солнца (т.-е. примерно, как от Земли до планеты Уран).





ДЕСЯТЬ молодых людей решили отпраздновать окончание школы товарищеским обедом в ресторане. Когда все собрались и первое блюдо было подано, заспорили о том, как усесться вокруг стола. Одни считали необходимым разместиться в алфавитном порядке, другие — по возрасту, третьи — по степени успешности, четвертые — по росту и т. п. Спор затянулся, суп успел простыть, а за стол никто не садился.

Примирил всех официант, обратившийся к ним с такой речью:

— Молодые друзья мои, оставьте ваши пререкания. Сядьте за стол, как кому придется, и выслушайте меня.

Все сели, как попало. Официант продолжал:

— Пусть один из вас запишет, в каком порядке вы сейчас сидите. Завтра вы снова явитесь сюда пообедать и разместитесь уже в ином порядке. Послезавтра опять сядете по-новому, и т. д., пока не перепробуете всех возможных размещений. Когда же придет черед вновь сесть так, как вы

сидите здесь сегодня, тогда — обещаю торжественно — я угощу вас всех бесплатно самым изысканным обедом!



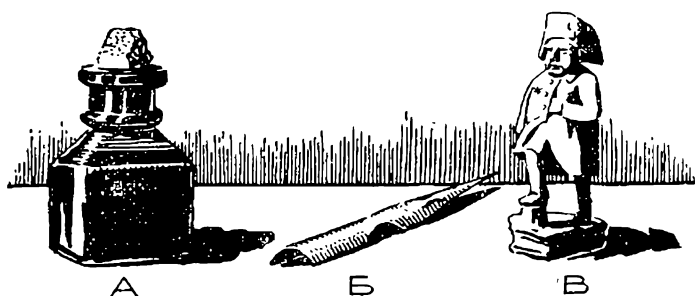
Предложение понравилось. Решено было ежедневно собираться в этом ресторане и перепробовать все способы размещения за столом, чтобы поскорее воспользоваться бесплатным обедом.

Однако, им не пришлось дожидаться этого дня. И вовсе не потому, что официант не исполнил обещания, а потому, что число всех возможных размещений за столом черезчур велико. Оно равняется ни мало ни много — 3628800.

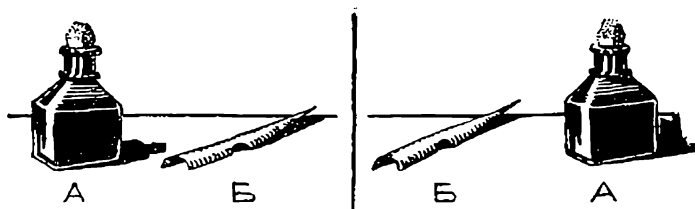
Такое число дней составляет, как нетрудно сосчитать, 9942 года (без малого), т. е. почти 10000 лет. Согласитесь, что это слишком долгий срок ожидания одного бесплатного обеда.

II

Может быть, вам кажется невероятным, чтобы 10 человек могли размещаться таким большим числом различных способов? В таком случае проверьте этот расчет сами. Но раньше надо научиться определять число перестановок. Для простоты начнем вычисление с небольшого числа предметов — с трех. Назовем их А, Б и В.



Мы желаем узнать, сколькими способами возможно переставлять их один на место другого. Рассуждаем так. Если отложить пока в сторону вещь В, то остальные две можно разместить только двумя способами:



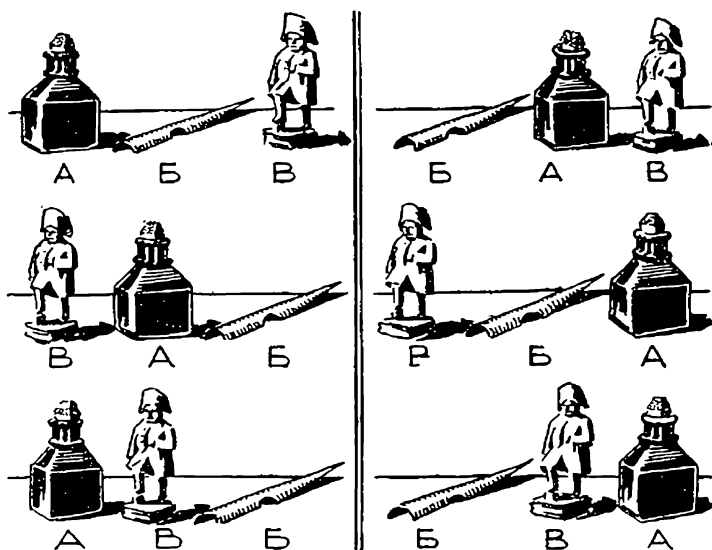
Теперь будем присоединять вещь В к каждой из этих пар. Мы можем сделать это трояко:

- 1) поместить В позади пары,
- 2) поместить В впереди пары,
- 3) поместить В между вещами пары

Других положений для вещи В, кроме этих трех, очевидно, быть не может. А так как у нас две пары, АВ и БА, то всех способов разместить вещи у нас имеется

$$2 \times 3 = 6.$$

Способы эти следующие:



Теперь пойдем дальше — сделаем расчет для 4 вещей. Пусть у нас 4 вещи: А, Б, В и Г. Опять отложим пока в сторону одну вещь, — напр., Г; а с остальными тремя вещами сделаем все возможные перестановки. Мы уже знаем, что число этих перестановок — 6. Сколькими же способами можно присоединить четвертую вещь Г к каждой из 6 троек? Очевидно, четыремя:

- 1) поместить Г позади тройки;
- 2) поместить Г впереди тройки;
- 3) поместить Г между 1-й и 2-й вещью;
- 4) поместить Г между 2-й и 3-й вещью;

Всего получим, следовательно,

$$6 \times 4 = 24 \text{ перестановки;}$$

а так как $6 = 2 \times 3$, и $2 = 1 \times 2$, то число всех перестановок можем представить в виде произведения:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

Рассуждая таким же образом и в случае 5-ти предметов, мы узнаем, что тогда число перестановок равно

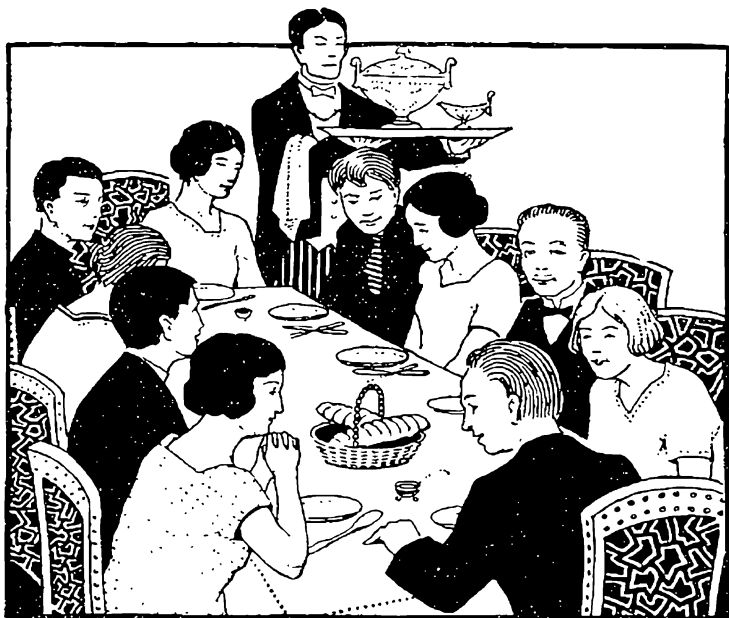
$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Для 6-ти предметов:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720.$$

И так далее.

Обратимся теперь к случаю с 10 обедающими. Число возможных здесь перестановок легко определить, если дать себе труд вычислить произведение



$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$$

Тогда и получится указанное выше число
3628800.

III.

Расчет был бы сложнее, если бы в числе 10 обедающих было 5 девушек, и они желали

бы сидеть за столом так, чтобы девушки и молодые люди чередовались. Хотя число возможных перемещений здесь гораздо меньше, вычислить его несколько труднее. Пусть сядет за стол — безразлично как — один из юношей. Остальные чет-



веро могут разместиться, оставляя между собою пустые стулья для девушек, — $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ -мя различными способами. Так как всех стульев 10, то первый юноша может сесть 10-ю способами; значит, число всех возможных размещений для молодых людей $10 \times 24 = 240$. Сколькими же способами могут сесть на пустые стулья между юношами 5 девушек? Очевидно, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 =$

— 120 способами. Сочетая каждое из 240 положений юношей с каждым из 120 положений девушек, получаем все число возможных размещений:

$$240 \times 120 = 28800.$$

Число это во много раз меньше предыдущего и потребовало бы всего 79 лет (без малого), — так что доживи молодые посетители ресторана до столетнего возраста, они могли бы дождаться бесплатного обеда, если не от самого официанта, то от его наследников.

В заключение предлагаю терпеливым любителям вычислений проверить следующий расчет:

Сколькими способами можно рассадить в классе 25 учеников?

Ответ как будто прост:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \dots 23 \times 24 \times 25$$

Однако, выполнить это умножение довольно хлопотливо. Кто его проделает, у того должен получиться такой результат — для большинства, вероятно, неожиданный по своей огромной величине:

$$15511210043330985984000000.$$

Число произносится так¹⁾:

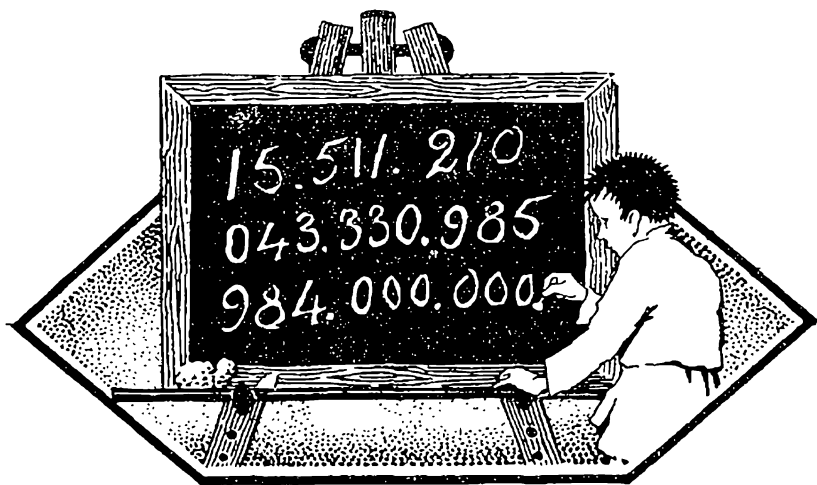
15 квадриллионов

511210 триллионов

43330 биллионов

985984 миллиона.

Это самое большое число из всех тех, какие написаны в нашей книжечке.



¹⁾ См. примечание на стр. 43.

Оглавление.

	стр:
Выгодная сделка	3
Городские слухи	15.
Награда	21
Легенда о шахматной доске	35
Быстрое размножение	47
Бесплатный обед	55.

Цена **60** к.



Издательство „РАДУГА“

Ленинград, Стремянная 14, телеф. 168-32.
Москва, Петровка 1/20, телеф. 4-90-76.